Mathsapiens.fr

Concours Général de Mathématiques

Session 2025

Exercice 1

Addition sur une parabole

Ex 1 :

=> Partie 1 : propriétés de $\oplus$

1) Déterminons tout d'abord une équation de (AB) dans le R.O.N., avec $A\begin{pmatrix} x_A \\ x_A^2 \end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix} x_B \\ x_B^2 \end{pmatrix}$ tq $y_A \neq y_B$, i.e $x_A^2 \neq x_B^2$ i.e. $x_A \neq \pm x_B$

$M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in (AB) \iff \overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires

$$\iff \mathrm{Det}\left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}\right) = 0$$

$$\iff \begin{vmatrix} x - x_A & x_B - x_A \\ y - x_A^2 & x_B^2 - x_A^2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\iff (x - x_A)(x_B^2 - x_A^2) - (y - x_A^2)(x_B - x_A) = 0$$

$$\iff (x - x_A)\cancel{(x_B - x_A)}(x_B + x_A) = (y - x_A^2)\cancel{(x_B - x_A)}$$

$$\iff (x - x_A)(x_A + x_B) = y - x_A^2 \quad \text{car } x_A \neq x_B$$

$$\iff (x_A + x_B)x \cancel{- x_A^2} - x_A . x_B = y \cancel{- x_A^2}$$

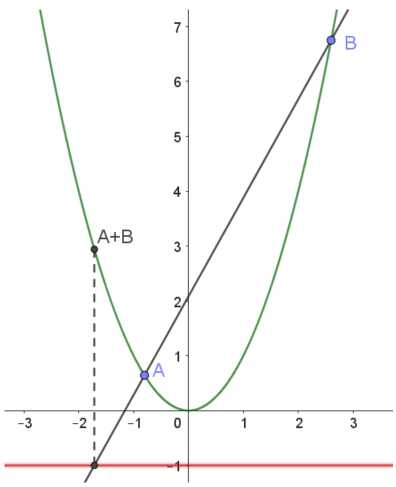
$$\iff y = (x_A + x_B).x - x_A . x_B$$

Puis $A \oplus B$ a la même abscisse que le pt d'intersection de (AB) et de Δ d'éq. $y = -1$

D'où $-1 = (x_A + x_B) . x_{A\oplus B} - x_A . x_B$

$$\iff (x_A + x_B) . x_{A\oplus B} = x_A . x_B - 1$$

$$\iff \boxed{x_{A\oplus B} = \frac{x_A . x_B - 1}{x_A + x_B}} \quad \text{car } x_A \neq -x_B$$



2) * On a $\begin{cases} y_A \neq y_B & \Rightarrow \quad x_A \neq \pm x_B \\ y_{A\oplus B} \neq y_C & \Rightarrow \quad x_{A\oplus B} \neq \pm x_C \end{cases}$

Puis d'après le résultat de la question 1) :

$$x_{(A\oplus B)\oplus C} = \frac{x_{A\oplus B}\cdot x_C - 1}{x_{A\oplus B} + x_C} = \frac{\frac{x_A\cdot x_B - 1}{x_A + x_B}\times x_C - 1}{\frac{x_A\cdot x_B - 1}{x_A + x_B} + x_C} = \frac{x_A\cdot x_B\cdot x_C - x_C - x_A - x_B}{x_A\cdot x_B - 1 + x_A\cdot x_C + x_B\cdot x_C}$$

* Par ailleurs, on a $\begin{cases} y_B \neq y_C & \Rightarrow \quad x_B \neq \pm x_C \\ y_A \neq y_{B\oplus C} & \Rightarrow \quad x_A \neq \pm x_{B\oplus C} \end{cases}$

D'où on peut calculer :

$$x_{A\oplus(B\oplus C)} = \frac{x_A\cdot x_{B\oplus C} - 1}{x_A + x_{B\oplus C}} = \frac{x_A\,\frac{x_B\cdot x_C - 1}{x_B + x_C} - 1}{x_A + \frac{x_B\cdot x_C - 1}{x_B + x_C}} = \frac{x_A\cdot x_B\cdot x_C - x_A - x_B - x_C}{x_A\cdot x_B + x_A\cdot x_C + x_B\cdot x_C - 1}$$

* Conclusion : On a $x_{(A\oplus B)\oplus C} = x_{A\oplus(B\oplus C)}$

Les points $(A\oplus B)\oplus C$ et $A\oplus(B\oplus C)$ sont sur $\mathcal{P}$ et ont la même abscisse.

Ils sont donc confondus : $\boxed{(A\oplus B)\oplus C = A\oplus(B\oplus C)}$

3) a) Déterminons l'équation de la tangente τ_A à $\mathcal{P}$ en A.

La fonction $f : x \mapsto x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fct de référence, et $\forall x\in\mathbb{R}$, $f'(x) = 2x$

D'où τ_A : $y = f'(x_A)\cdot(x - x_A) + f(x_A) \Leftrightarrow y = 2x_A(x - x_A) + x_A^2 \Leftrightarrow y = 2x_A\cdot x - x_A^2$

Puis $A\oplus A$ a la même abscisse que le point d'intersection de τ_A et de Δ, d'où :

$-1 = 2x_A\cdot x_{A\oplus A} - x_A^2 \quad \Leftrightarrow \quad 2x_A\cdot x_{A\oplus A} = x_A^2 - 1$

$\Leftrightarrow \quad \boxed{x_{A\oplus A} = \frac{x_A^2 - 1}{2x_A}}$ car A distinct de O donc $x_A \neq 0$

3) b * On a : $\begin{cases} y_{A\oplus A} \neq y_B \Rightarrow x_{A\oplus A} \neq \pm x_B \\ A \text{ distinct de } O \Rightarrow x_A \neq 0 \end{cases}$

Puis on peut calculer en utilisant le résultat de la question précédente :

$$x_{(A\oplus A)\oplus B} = \frac{x_{A\oplus A} \cdot x_B - 1}{x_{A\oplus A} + x_B} = \frac{\frac{x_A^2 - 1}{2x_A} \cdot x_B - 1}{\frac{x_A^2-1}{2x_A} + x_B} = \frac{x_A^2 \cdot x_B - x_B - 2x_A}{x_A^2 - 1 + 2x_A \cdot x_B}$$

* Par ailleurs, on a : $\begin{cases} y_A \neq y_B \Rightarrow x_A \neq \pm x_B \\ y_A \neq y_{A\oplus B} \Rightarrow x_A \neq \pm x_{A\oplus B} \end{cases}$

D'où le calcul suivant :

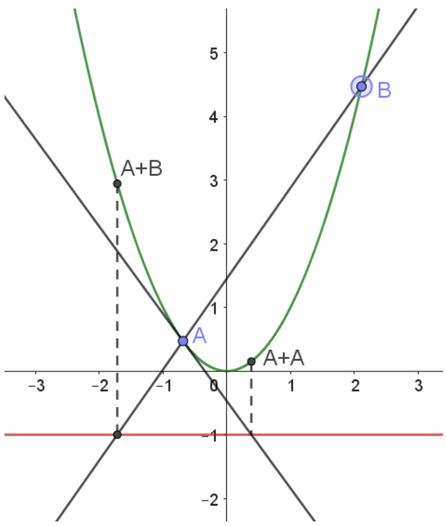
$$x_{A\oplus(A\oplus B)} = \frac{x_A \cdot x_{A\oplus B} - 1}{x_A + x_{A\oplus B}} = \frac{x_A \cdot \frac{x_A \cdot x_B - 1}{x_A + x_B} - 1}{x_A + \frac{x_A \cdot x_B - 1}{x_A + x_B}} = \frac{x_A^2 \cdot x_B - x_A - x_A - x_B}{x_A^2 + x_A \cdot x_B + x_A \cdot x_B - 1}$$

$$= \frac{x_A^2 \cdot x_B - 2x_A - x_B}{x_A^2 + 2x_A \cdot x_B - 1}$$

* Conclusion : on a $x_{(A\oplus A)\oplus B} = x_{A\oplus(A\oplus B)}$

Les points $(A\oplus A)\oplus B$ et $A\oplus(A\oplus B)$ sont sur $\mathcal{P}$ et ont la même abscisse.

Ils sont donc confondus : $\boxed{(A\oplus A)\oplus B = A\oplus(A\oplus B)}$



⇒ Partie 2 : Etude d'une suite de points

4) ⓐ On suppose que $A(3;9)$ donc $x_0 = 3 \neq 0$

Puis en utilisant le résultat de la question 3. a), on a :

$$(x_n) : \quad x_0 = 3 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = \begin{cases} \dfrac{x_n^2 - 1}{2x_n} & \text{si } x_n \neq 0 \\ 0 & \text{si } x_n = 0 \end{cases}$$

Nous devons montrer que le cas $x_n = 0$ n'est pas possible en partant de $x_0 = 3$

D'après la relation de récurrence, il faudrait que le numérateur $x_n^2 - 1$ s'annule pour que le terme suivant soit nul. Ceci revient à avoir : $x_n = -1$ ou $x_n = 1$.

Par ailleurs, nous pouvons conjecturer que par construction tous les x_n seront rationnels.

Démontrons donc par récurrence $\mathcal{P}(n)$: $\forall n \in \mathbb{N},\ x_n \in \mathbb{Q} \setminus \{-1;0;1\}$

Initialisation : Pour $n = 0$, on a $x_0 = 3 \in \mathbb{Q} \setminus \{-1;0;1\}$ ⇒ $\mathcal{P}(0)$ vraie

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $x_n \in \mathbb{Q} \setminus \{-1;0;1\}$

et montrons que $x_{n+1} \in \mathbb{Q} \setminus \{-1;0;1\}$

* D'après HR, $x_n \neq 0$ donc $\dfrac{x_n^2 - 1}{2x_n}$ est bien défini

et comme $x_n \in \mathbb{Q}^*$, $\dfrac{x_n^2-1}{2x_n} \in \mathbb{Q} \Rightarrow x_{n+1} \in \mathbb{Q}$

* De plus, d'après HR, $x_n \neq \pm 1$

$$\Rightarrow x_n^2 \neq 1$$
$$\Rightarrow x_n^2 - 1 \neq 0$$
$$\Rightarrow \frac{x_n^2 - 1}{2x_n} \neq 0$$
$$\Rightarrow x_{n+1} \neq 0$$

On a donc pour l'instant $x_{n+1} \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$

* Supposons par l'absurde que $x_{n+1} = 1$

On a alors $\dfrac{x_n^2 - 1}{2x_n} = 1 \underset{\text{car } x_n \neq 0}{\Leftrightarrow} x_n^2 - 1 = 2x_n \Leftrightarrow x_n^2 - 2x_n - 1 = 0$

$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 4 + 4 = 8 > 0$

D'où $x_n = \dfrac{-(-2) - \sqrt{8}}{2 \times 1} = 1 - \sqrt{2}$ ou $x_n = \dfrac{-(-2) + \sqrt{8}}{2 \times 1} = 1 + \sqrt{2}$

Or ceci est absurde car $1 - \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ et $1 + \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

Donc $x_{n+1} \neq 1$

* Supposons désormais par l'absurde que $x_{n+1} = -1$

On a alors $\dfrac{x_n^2 - 1}{2x_n} = -1 \underset{\text{car } x_n \neq 0}{\Leftrightarrow} x_n^2 - 1 = -2x_n \Leftrightarrow x_n^2 + 2x_n - 1 = 0$

$\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 4 + 4 = 8 > 0$

D'où $x_n = \dfrac{-2 - \sqrt{8}}{2 \times 1} = -1 - \sqrt{2}$ ou $x_n = \dfrac{-2 + \sqrt{8}}{2 \times 1} = -1 + \sqrt{2}$

Or ceci est absurde car $-1 - \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ et $-1 + \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

Donc $x_{n+1} \neq -1$

* Nous venons de montrer que $x_{n+1} \in \mathbb{Q} \setminus \{-1; 0; 1\} \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$ vraie

Conclusion : $\mathcal{P}(n)$ vraie pour $n = 0$ et héréditaire à partir de ce rang, donc d'après le principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \in \mathbb{Q} \setminus \{-1; 0; 1\}$

En particulier, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ x_n \neq 0}$

b) On a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = g(x_n)$ avec $g : t \longmapsto \dfrac{t^2 - 1}{2t}$

Recherchons les éventuels points fixes de g :

$g(t) = t \Leftrightarrow \dfrac{t^2 - 1}{2t} = t \Leftrightarrow \dfrac{t^2 - 1}{2t} - t = 0 \Leftrightarrow \dfrac{t^2 - 1 - 2t^2}{2t} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{-t^2 - 1}{2t} = 0$

$\Leftrightarrow (-t^2 - 1 = 0 \text{ et } 2t \neq 0) \Leftrightarrow (t^2 = -1 \text{ et } t \neq 0)$

Ainsi, g n'admet pas de point fixe donc $\boxed{(x_n) \text{ ne converge pas.}}$

Remarque: Le théorème précédent est la contraposée de : "si (x_n) converge, alors (x_n) converge vers un de ses points fixes".

Si vous ne connaissez pas ce théorème, vous pouvez de façon très similaire raisonner par l'absurde en supposant que : $\exists \ell \in \mathbb{R}, \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \ell$

Puis par unicité de la limite, $x_{n+1} = \dfrac{x_n^2-1}{2x_n} \Rightarrow \ell = \dfrac{\ell^2-1}{2\ell} \Rightarrow \ell - \dfrac{\ell^2-1}{2\ell} = 0$

$$\Rightarrow \frac{\ell^2+1}{2\ell} = 0 \text{ (absurde)}$$

5) Dire que $\forall c \in \mathbb{N}^*$, $E(c) = \{P \in \mathcal{P}, x_P \in \mathbb{Q} \text{ et } h(P) \leqslant c\}$ est fini revient à dire qu'il y a un nombre fini de points qui satisfont la propriété. Ceci se traduit par $\underbrace{|E(c)|}_{\text{Card}(E(c))} \in \mathbb{N}$, ou encore $|E(c)| < +\infty$

On veut $x_P \in \mathbb{Q}$, donc $\exists (a;b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$, $x_P = \dfrac{a}{b}$ et $\overset{\text{PGCD}}{a \wedge b} = 1$

Soit $c \in \mathbb{N}^*$, on veut $h(P) \leqslant c \iff \ln(H(x_P)) \leqslant c$

$\iff H(x_P) \leqslant e^c$) par croissance de la fct exp

$\iff \max\{|a|, |b|\} \leqslant e^c$

$\Rightarrow \begin{cases} |a| \leqslant e^c \\ |b| \leqslant e^c \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} |a| \leqslant e^c \\ b \leqslant e^c \end{cases}$) car $b \in \mathbb{N}^*$

$\Rightarrow \begin{cases} |a| \leqslant k \\ b \leqslant k \end{cases}$) en posant $k = \lfloor e^c \rfloor$

Comme a et b sont des entiers et que les valeurs qu'ils peuvent prendre sont bornées, a et b ne peuvent prendre qu'un nombre fini de valeurs. Il en va ainsi de même pour leur quotient $x_P = \dfrac{a}{b} \in \mathbb{Q}$.
Il existe donc un nombre fini de points $P \in \mathcal{P}$ tels que $x_P \in \mathbb{Q}$ et $h(P) \leqslant c$ pour une valeur de $c \in \mathbb{N}^*$ donnée. Ainsi, $\boxed{|E(c)| < +\infty}$

6) Soit $(a\,;b) \in \mathbb{Z}^* \times \mathbb{N}^*$

Démontrons par l'absurde que $a \wedge b = 1 \implies a^2-b^2 \wedge ab = 1$

Supposons donc que $a \wedge b = 1$ et que $\exists\, d \neq 1$ tq $a^2-b^2 \wedge ab = d$

Tout d'abord, comme $d \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, d possède au moins un diviseur premier p.

Puis comme $d = a^2-b^2 \wedge ab$, on a $d \mid ab$ et $d \mid a^2-b^2$

Par transitivité, on a : $\begin{cases} p \mid d \\ d \mid ab \end{cases} \implies p \mid ab$

p étant premier, le lemme d'Euclide permet d'affirmer que : $p \mid a$ ou $p \mid b$

Raisonnons par disjonction de cas :

* Si $p \mid a$: on a alors $p \mid a \implies p \mid a^2$

  Puis par combinaison linéaire : $\begin{cases} p \mid a^2 \\ p \mid a^2-b^2 \end{cases} \implies p \mid a^2-b^2-a^2$
  $\implies p \mid -b^2$
  $\implies p \mid b^2$
  $\implies p \mid b \times b$
  $\implies p \mid b$ lemme d'Euclide avec p premier

  On a alors $p \mid a$ et $p \mid b$, ce qui est absurde puisqu'on a supposé $a \wedge b = 1$

* Si $p \mid b$: on raisonne de la même manière que précédemment

  $\begin{cases} p \mid b \\ p \mid a^2-b^2 \end{cases} \implies \begin{cases} p \mid b^2 \\ p \mid a^2-b^2 \end{cases} \implies p \mid a^2 \implies p \mid a$

  Ceci est absurde car on obtient $p \mid a$ et $p \mid b$ alors que $a \wedge b = 1$

* Conclusion : Nous venons de montrer que $\begin{cases} a \wedge b = 1 \\ a^2-b^2 \wedge ab \neq 1 \end{cases}$ est absurde.

  Donc on a : $\boxed{a \wedge b = 1 \implies a^2-b^2 \wedge ab = 1}$

* 2ème méthode pour la question 6 :

$a \wedge b = 1$ donc d'après le théorème de Bézout, $\exists (u;v) \in \mathbb{Z}^2$, $au + bv = 1$

$\Rightarrow (au+bv)^3 = 1^3$

Binôme de Newton

$\Rightarrow a^3u^3 + 3a^2u^2bv + 3aub^2v^2 + b^3v^3 = 1$

$\Rightarrow a^3u^3 + b^3v^3 + 3uvab(au+bv) = 1$

car $au+bv=1$

$\Rightarrow a^3u^3 + b^3v^3 + 3uv.(ab) = 1$

on fait apparaître a^2 et $-b^2$

$\Rightarrow a^2(au^3) + (-b^2)(-bv^3) + 3uv.(ab) = 1$

on fait apparaître (et on compense) les facteurs nécessaires pour avoir $(a^2-b^2)\times q$, $q \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow a^2(au^3) + a^2(-bv^3) - a^2(-bv^3)$
$+(-b^2).(-bv^3) + (-b^2)(au^3) - (-b^2)(au^3)$
$+ 3uv.(ab) = 1$

$\Rightarrow a^2(au^3 - bv^3) + a^2bv^3 + (-b^2)(au^3 - bv^3) + b^2au^3 + 3uv(ab) = 1$

$\Rightarrow (a^2-b^2)(au^3-bv^3) + (ab)\times av^3 + (ab)bu^3 + 3uv.(ab) = 1$

$$\Rightarrow (a^2-b^2)\underbrace{(au^3-bv^3)}_{q\in\mathbb{Z}} + (ab)\underbrace{(av^3+bu^3+3uv)}_{k\in\mathbb{Z}} = 1$$

Donc d'après le théorème de Bézout, $\boxed{a^2-b^2 \wedge ab = 1}$

7) ⚠ Question très difficile ⚠

On veut montrer que : $\exists (m;M) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x_P \in \mathbb{Q}^*,$

$$m + h(P \oplus P) \leqslant 2\,h(P) \leqslant h(P \oplus P) + M$$

$$\Leftrightarrow \quad m \leqslant 2\,h(P) - h(P \oplus P) \leqslant M$$

$$\Leftrightarrow \quad m \leqslant 2\ln(H(x_P)) - \ln(H(x_{P \oplus P})) \leqslant M$$

$$\Leftrightarrow \quad m \leqslant \ln\left((H(x_P))^2\right) - \ln(H(x_{P \oplus P})) \leqslant M$$

$$\Leftrightarrow \quad m \leqslant \ln \frac{(H(x_P))^2}{H(x_{P \oplus P})} \leqslant M$$

$$\Leftrightarrow \quad e^m \leqslant \frac{(H(x_P))^2}{H(x_{P \oplus P})} \leqslant e^M$$

Le problème proposé revient donc à encadrer $\dfrac{(H(x_P))^2}{H(x_{P \oplus P})}$.

Nous devons donc comparer $(H(x_P))^2$ et $H(x_{P \oplus P})$.

$x_P \in \mathbb{Q}^*$ donc $\exists (a;b) \in \mathbb{Z}^* \times \mathbb{N}^*,\ x_P = \dfrac{a}{b}$ avec $a \wedge b = 1$

Donc d'une part : $(H(x_P))^2 = \left(\max\{|a|, |b|\}\right)^2 = \left(\max\{|a|, b\}\right)^2$ car $b > 0$

et d'autre part : $x_{P \oplus P} = \dfrac{x_P^2 - 1}{2x_P}$ d'après la question 3.a)

$$\Leftrightarrow \quad x_{P \oplus P} = \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 1}{2 \times \frac{a}{b}} = \frac{\frac{a^2}{b^2} - \frac{b^2}{b^2}}{2 \times \frac{a}{b}} = \frac{a^2 - b^2}{2 \times \frac{a}{b} \times b^2} = \frac{a^2 - b^2}{2ab}$$

Or d'après la question 6, $a \wedge b = 1 \Rightarrow a^2 - b^2 \wedge ab = 1$

Ainsi, pour étudier l'expression de $H(x_{P \oplus P})$, nous devons procéder par disjonction de cas selon la parité de $(a^2 - b^2)$

* <u>1er cas :</u> si $a^2 - b^2$ est impair, on a alors :

$a \wedge b = 1 \Rightarrow a^2 - b^2 \wedge ab = 1$ d'après la question 6

$\Rightarrow a^2 - b^2 \wedge 2ab = 1$ car $a^2 - b^2 \equiv 1 [2]$

Donc par définition, $H(x_{P \oplus P}) = H\left(\dfrac{a^2 - b^2}{2ab}\right) = \max\{|a^2 - b^2|, |2ab|\}$

On rappelle que $(H(x_P))^2 = (\max\{|a|; |b|\})^2$

Pour ces deux expressions, par symétrie des rôles de a et de b, notamment grâce à la valeur absolue dans $|a^2 - b^2|$, on peut supposer sans perte de généralité que $|a| \geqslant |b|$.

On a alors d'une part : $(H(x_P))^2 = (\max\{|a|; |b|\})^2 = |a|^2 = a^2$

Et d'autre part : $\begin{cases} |a^2 - b^2| \leqslant a^2 + b^2 \leqslant 2a^2 \\ |2ab| = 2 \times |a| \times |b| \leqslant 2a^2 \end{cases}$ car $|a| \geqslant |b|$

D'où $\max\{|a^2 - b^2|, |2ab|\} \leqslant 2a^2$

$\Leftrightarrow H(x_{P \oplus P}) \leqslant 2(H(x_P))^2$

$\Leftrightarrow \ln(H(x_{P \oplus P})) \leqslant \ln(2(H(x_P))^2)$

$\Leftrightarrow \ln(H(x_{P \oplus P})) \leqslant \ln(2) + \ln((H(x_P))^2)$

$$\iff \quad -\ln(2) + \ln\left(H(x_{P\oplus P})\right) \leqslant 2\ln\left(H(x_P)\right)$$

$$\iff \quad -\ln(2) + h(P\oplus P) \leqslant 2\,h(P)$$

Ceci nous donne la partie gauche de l'encadrement recherché pour le cas $a^2-b^2 \equiv 1\,[2]$ uniquement. Recherchons, toujours dans ce cas, la partie droite de l'inégalité. On part alors de $H(x_{P\oplus P}) = \max\{|a^2-b^2|, |2ab|\}$ et on étudie les cas de figures :

→ Si $|a^2-b^2| \geqslant |2ab|$:

On conserve, toujours sans perte de généralité, la supposition $|a| \geqslant |b|$

On a donc : $\begin{cases} |a^2-b^2| \geqslant |2ab| \\ a^2 \geqslant a^2-b^2 \Rightarrow a^2 \geqslant |a^2-b^2| \\ |2ab| = 2|a|\times b \geqslant 2b^2 \quad \text{car } |a|\geqslant|b| \text{ et } b>0 \end{cases}$

D'où par transitivité : $a^2 \geqslant |a^2-b^2| \geqslant |2ab| \geqslant 2b^2$

$$\Rightarrow a^2 \geqslant 2b^2$$

$$\Rightarrow -a^2 \leqslant -2b^2$$

$$\Rightarrow 2a^2 - a^2 \leqslant 2a^2 - 2b^2$$

$$\Rightarrow a^2 \leqslant 2(a^2-b^2)$$

$$\Rightarrow \left(H(x_P)\right)^2 \leqslant 2(a^2-b^2)$$

voir page précédente, $\left(H(x_P)\right)^2 = a^2$

Or par définition, $2(a^2-b^2) \leqslant 2\max\left(|a^2-b^2|, |2ab|\right) = 2H(x_{P\oplus P})$

Donc par transitivité, $\left(H(x_P)\right)^2 \leqslant 2\,H(x_{P\oplus P}) \quad (*)$

→ Si $|a^2-b^2| < |2ab|$:

On suppose toujours que $|a| \geqslant |b|$

On a donc : $\begin{cases} |a^2-b^2| = a^2-b^2 \\ |2ab| = 2|a| \times b \quad \text{car } b>0 \end{cases}$

D'où $|a^2-b^2| < |2ab| \Rightarrow a^2-b^2 < 2|a|.b$

$\Rightarrow a^2 < 2|a|.b + b^2$

$\Rightarrow a^2 < b(2|a|+b)$ ↲ car $|a|>b$

$\Rightarrow a^2 < b \times 3|a|$

$\Rightarrow (H(x_P))^2 < 3|a| \times b$

$\Rightarrow (H(x_P))^2 < \frac{3}{2} \times 2|a| \times b$

$\Rightarrow (H(x_P))^2 < \frac{3}{2} \times |2ab|$

Or par définition, $\frac{3}{2}|2ab| \leqslant \frac{3}{2} \max\{|a^2-b^2|, |2ab|\} = \frac{3}{2} H(x_{P \oplus P})$

Donc par transitivité, $(H(x_P))^2 \leqslant \frac{3}{2} H(x_{P \oplus P}) \quad (**)$

→ Conclusion : En faisant la synthèse pour la partie droite de l'inégalité dans le cas $a^2-b^2 \equiv 1\ [2]$, on a : $(*)$ et $(**)$

$\begin{cases} (H(x_P))^2 \leqslant 2\, H(x_{P \oplus P}) \\ (H(x_P))^2 \leqslant \frac{3}{2} H(x_{P \oplus P}) \end{cases} \Rightarrow (H(x_P))^2 \leqslant 2\, H(x_{P \oplus P})$

$\Rightarrow \ln\left((H(x_P))^2\right) \leqslant \ln(2 \times H(x_{P \oplus P}))$

$\Rightarrow 2\ln(H(x_P)) \leqslant \ln(2) + \ln(H(x_{P \oplus P}))$

$\Rightarrow 2\, h(P) \leqslant h(P \oplus P) + \ln 2$

Nous pouvons donc conclure le cas $a^2-b^2 \equiv 1\,[2]$ par l'encadrement :

$$\boxed{-\ln(2) + h(P\oplus P) \leqslant 2h(P) \leqslant h(P\oplus P) + \ln(2)} \qquad (1)$$

* <u>2ème cas :</u> si a^2-b^2 est pair, on a alors :

$$a\wedge b = 1 \Rightarrow a^2-b^2 \wedge ab = 1 \quad \text{d'après la question 6}$$

$$\Rightarrow a^2-b^2 \wedge 2ab = 2 \quad \text{car } a^2-b^2 \equiv 0\,[2]$$

$$\Rightarrow \frac{a^2-b^2}{2} \wedge ab = 1$$

Donc par définition, $H(x_{P\oplus P}) = H\left(\dfrac{\frac{a^2-b^2}{2}}{ab}\right) = \max\left\{\left|\dfrac{a^2-b^2}{2}\right|, |ab|\right\}$

Pour éviter de refaire le même raisonnement que précédemment, utilisons quelques résultats obtenus dans le 1er cas et qui ne faisaient pas intervenir l'hypothèse $a^2-b^2 \equiv 1\,[2]$.

Les résultats suivants restent donc vrais (toujours en supposant $|a| \geqslant |b|$ sans perte de généralité) :

$$\begin{cases} \left(\max\{|a|;|b|\}\right)^2 = a^2 \\ \max\{|a^2-b^2|, 2|ab|\} \leqslant 2a^2 \\ a^2 \leqslant 2\max\{|a^2-b^2|, |2ab|\} \quad \text{car} \quad a^2 \leqslant 2(a^2-b^2) \leqslant 2\max\{|a^2-b^2|, |2ab|\} \end{cases}$$

D'où $\max\{|a^2-b^2|, 2|ab|\} \leqslant 2a^2 \leqslant 2\times 2\max\{|a^2-b^2|, |2ab|\}$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\max\{|a^2-b^2|, 2|ab|\} \leqslant a^2 \leqslant 2\times\max\{|a^2-b^2|, |2ab|\}$$

$$\Rightarrow \max\left\{\frac{1}{2}\left|a^2-b^2\right|, \frac{1}{2}\times 2|ab|\right\} \leqslant a^2 \leqslant 4\times\frac{1}{2}\max\left\{\left|a^2-b^2\right|, 2|ab|\right\}$$

$$\Rightarrow \max\left\{\left|\frac{a^2-b^2}{2}\right|, |ab|\right\} \leqslant a^2 \leqslant 4\times\max\left\{\left|\frac{a^2-b^2}{2}\right|, |ab|\right\}$$

$$\Rightarrow H(x_{P\oplus P}) \leqslant a^2 \leqslant 4\,H(x_{P\oplus P})$$

$$\Rightarrow H(x_{P\oplus P}) \leqslant \left(\max\{|a|,|b|\}\right)^2 \leqslant 4\,H(x_{P\oplus P})$$

$$\Rightarrow H(x_{P\oplus P}) \leqslant \left(H(x_P)\right)^2 \leqslant 4\,H(x_{P\oplus P})$$

$$\Rightarrow \ln\left(H(x_{P\oplus P})\right) \leqslant \ln\left(\left(H(x_P)\right)^2\right) \leqslant \ln\left(4\times H(x_{P\oplus P})\right)$$

$$\Rightarrow h(P\oplus P) \leqslant 2\ln\left(H(x_P)\right) \leqslant \ln(4) + \ln H(x_{P\oplus P})$$

$$\Rightarrow \boxed{h(P\oplus P) \leqslant 2\,h(P) \leqslant h(P\oplus P) + \ln 4} \qquad (2)$$

* <u>Conclusion de la question 7</u> : En faisant la synthèse des deux cas, on obtient avec (1) et (2) :

$$\begin{cases} -\ln(2) + h(P\oplus P) \leqslant 2\,h(P) \leqslant h(P\oplus P) + \ln(2) & (1) \\ h(P\oplus P) \leqslant 2\,h(P) \leqslant h(P\oplus P) + \ln(4) & (2) \end{cases}$$

En prenant le minimum pour l'inégalité de gauche et le maximum pour celle de droite, on peut conclure que :

$$\boxed{-\ln(2) + h(P\oplus P) \leqslant 2\,h(P) \leqslant h(P\oplus P) + \ln(4)}$$

D'où $m = -\ln 2$ et $M = \ln 4$

8) (a) Comme on suppose dans l'énoncé que (v_n) est majorée, il suffit de montrer qu'elle est croissante pour s'assurer de sa convergence.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_{n+1} - v_n = \sum_{k=0}^{n} |u_{k+1} - u_k| - \sum_{k=0}^{n-1} |u_{k+1} - u_k|$$

$$= |u_{n+1} - u_n| + \cancel{\sum_{k=0}^{n-1} |u_{k+1} - u_k|} - \cancel{\sum_{k=0}^{n-1} |u_{k+1} - u_k|}$$

$$= |u_{n+1} - u_n| \geqslant 0 \quad \text{en tant que valeur absolue}$$

Donc (v_n) est croissante.

Comme (v_n) est majorée, d'après le théorème de la limite monotone, $\boxed{(v_n) \text{ converge}}$

(b) Par définition, $\forall x \in \mathbb{R}, \quad -|x| \leqslant x \leqslant |x|$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}, \quad -|u_{n+1} - u_n| \leqslant u_{n+1} - u_n \leqslant |u_{n+1} - u_n|$

Puis en ajoutant $|u_{n+1} - u_n|$ à chaque membre de l'inégalité, on obtient : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant u_{n+1} - u_n + |u_{n+1} - u_n| \leqslant 2|u_{n+1} - u_n|}$

(c) Démontrons que $(u_n + v_n)$ est monotone et bornée pour conclure.
Commençons par étudier les variations de $(u_n + v_n)$ afin ensuite de nous concentrer sur la recherche d'un majorant ou d'un minorant (et pas nécessairement les deux).

* Variations de $(u_n + v_n)$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (u_{n+1} + v_{n+1}) - (u_n + v_n) = u_{n+1} - u_n + v_{n+1} - v_n$$

$$= u_{n+1} - u_n + |u_{n+1} - u_n| \quad \text{d'après } 8.a$$

$$\geqslant 0 \quad \text{d'après } 8.b$$

Donc $(u_n + v_n)$ est croissante.

* Recherche d'un majorant pour $(u_n + v_n)$:

Nous allons utiliser la relation de la question 8.b puis sommer chacun des membres.

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant u_{k+1} - u_k + |u_{k+1} - u_k| \leqslant 2\,|u_{k+1} - u_k|$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=0}^{n-1} 0 \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \left(u_{k+1} - u_k + |u_{k+1} - u_k|\right) \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} 2\,|u_{k+1} - u_k|$$

par linéarité de la somme

$$\Rightarrow 0 \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) + \sum_{k=0}^{n-1} |u_{k+1} - u_k| \leqslant 2 \sum_{k=0}^{n-1} |u_{k+1} - u_k|$$

car $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \sum_{k=0}^{n-1} |u_{k+1} - u_k|$

$$\Rightarrow 0 \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) + v_n \leqslant 2 v_n$$

par somme télescopique

$$\Rightarrow 0 \leqslant u_n - u_0 + v_n \leqslant 2 v_n$$

$$\Rightarrow u_0 \leqslant u_n + v_n \leqslant 2 v_n + u_0$$

Par ailleurs, d'après la question 8.a, on sait que (v_n) est croissante et converge vers une limite que nous noterons ℓ. On a donc : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n \leqslant \ell$

Puis l'inégalité précédente devient par transitivité :

$$u_0 \leqslant u_n + v_n \leqslant 2\ell + u_0$$

Ainsi $(u_n + v_n)$ est majorée par $2\ell + u_0$ (elle est même bornée...)

* Conclusion : $(u_n + v_n)$ est croissante et majorée, donc d'après le théorème de la limite monotone, $\boxed{(u_n + v_n) \text{ converge.}}$

d) D'après les questions précédentes, on sait que (v_n) et $(u_n + v_n)$ convergent.

Donc par différence, $\boxed{(u_n) \text{ converge.}}$

Par ailleurs, si on note $\lim_{n \to +\infty} v_n = \ell$ et $\lim_{n \to +\infty} u_n + v_n = \ell'$,

on a $\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} (u_n + v_n - v_n) = \lim_{n \to +\infty} (u_n + v_n) - \lim_{n \to +\infty} v_n = \ell' - \ell$

9) Dans cette dernière question, nous allons réinvestir une grande partie des résultats obtenus dans la partie 2, notamment les questions 4, 7 et 8.

Tout d'abord, comme on considère le point $A(3;9)$, la question 4.a) nous permet d'affirmer que $x_n \in \mathbb{Q} \setminus \{-1;0;1\} \subset \mathbb{Q}^*$. Nous avons ainsi les conditions requises pour utiliser l'encadrement de la question 7, avec $P = A_n$. Ceci interviendra un peu plus tard car nous allons commencer notre résolution à partir des résultats de la question 8. Nous voulons en effet démontrer la convergence de la suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$: $\forall n \in \mathbb{N}, \quad t_n = \dfrac{h(A_n)}{2^n}$

Introduisons donc une suite (v_n) définie par $v_0 = 0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n = \sum_{k=0}^{n-1} \left| t_{k+1} - t_k \right|$$

D'après la question 8, si nous arrivons à démontrer que (v_n) est majorée, alors il en découlera que (t_n) converge.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n = \sum_{k=0}^{n-1} \left| t_{k+1} - t_k \right|$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \left| \frac{h(A_{k+1})}{2^{k+1}} - \frac{h(A_k)}{2^k} \right|$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \left| \frac{h(A_{k+1}) - 2h(A_k)}{2^{k+1}} \right|$$

$$\Leftrightarrow \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{|h(A_{k+1}) - 2h(A_k)|}{|2^{k+1}|}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^{k+1}} \times \left| h(A_{k+1}) - 2h(A_k) \right|$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^{k+1}} \times \left| h(A_k \oplus A_k) - 2h(A_k) \right|$$

par définition de A_{k+1}

Or d'après la question 7, puisque $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $x_n \in \mathbb{Q}^*$, on a $\forall k \in [\![0;n-1]\!]$,

$$-\ln(2) + h(A_k \oplus A_k) \leqslant 2h(A_k) \leqslant h(A_k \oplus A_k) + \ln(4)$$

$$\Leftrightarrow \quad -\ln(2) \leqslant 2h(A_k) - h(A_k \oplus A_k) \leqslant \ln(4)$$

par transitivité puisque $-\ln 4 \leqslant -\ln 2$

$$\Rightarrow \quad -\ln(4) \leqslant 2h(A_k) - h(A_k \oplus A_k) \leqslant \ln(4)$$

$$\Rightarrow \quad |2h(A_k) - h(A_k \oplus A_k)| \leqslant \ln 4$$

$$\Rightarrow \quad |h(A_k \oplus A_k) - 2h(A_k)| \leqslant \ln 4$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2^{k+1}} \left| h(A_k \oplus A_k) - 2h(A_k) \right| \leqslant \frac{1}{2^{k+1}} \times \ln 4$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^{k+1}} \left| h(A_k \oplus A_k) - 2h(A_k) \right| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2^{k+1}} \times \ln 4 \right)$$

$$\Rightarrow \quad v_n \leqslant \ln(4) \times \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^{k+1}}$$

On $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^{k+1}} = \sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2^k}\right)$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{(n-1)-0+1}}{1-\frac{1}{2}}$$

$$= \cancel{\frac{1}{2}} \times \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\cancel{\frac{1}{2}}}$$

$$= 1-\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

On $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\left(\frac{1}{2}\right)^n > 0 \implies -\left(\frac{1}{2}\right)^n < 0$

une inégalité large serait suffisante

$$\implies 1-\left(\frac{1}{2}\right)^n < 1$$

$$\implies \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^{k+1}} < 1$$

$$\implies \ln(4) \times \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^{k+1}} < \ln 4$$

$$\implies v_n < \ln 4$$

$\implies (v_n)$ est majorée

$\implies \boxed{(t_n) \text{ converge}}$) d'après la question 8

<u>Remarque :</u> Si on n'avait pas réussi à trouver les valeurs de m et M dans la question 7, on pouvait ici utiliser $\max(|M|, |m|)$ au lieu de $\ln 4$. Ainsi, on aurait eu : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n < \max(|M|, |m|)$

Exercice 2

Suite positive et suite bornée

Exercice 3

Equation fonctionnelle

Ex 3 : f vérifie $\mathcal{E}$ si : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x+1) = \frac{1}{2} + \sqrt{f(x) - f(x)^2}$

1) Etudions au préalable l'égalité proposée pour obtenir des informations sur la fonction f.

* Tout d'abord, comme une racine carrée est toujours positive ou nulle,

on a : $\forall x \in \mathbb{R},\ \sqrt{f(x) - f(x)^2} \geqslant 0 \Rightarrow \frac{1}{2} + \sqrt{f(x) - f(x)^2} \geqslant \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow f(x+1) \geqslant \frac{1}{2}$$

car valable $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow f(x) \geqslant \frac{1}{2}$$

Donc $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \in I_1 = \left[\frac{1}{2} ; +\infty\right[$

* Nous savons également que toute quantité sous une racine carrée est positive ou nulle, donc on a : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) - f(x)^2 \geqslant 0$

Posons $X = f(x)$ et étudions le signe du polynôme $X - X^2 = X(1-X)$

Il s'agit d'un polynôme du second degré concave (coefficient dominant strictement négatif) avec pour racines $X = 0$ et $X = 1$, d'où :

X	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$-X^2 + X$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \in I_2 = [0 ; 1]$

* Finalement, $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \in I_1 \cap I_2 = \left[\frac{1}{2} ; 1\right]$

Essayons maintenant de proposer une fonction continue pour f.
Dans cette question, il ne nous est pas demandé la forme générale de f, mais simplement une fonction qui convienne. Recherchons donc une fonction la plus simple possible qui satisfasse $\mathcal{E}$ parmi les fonctions continues que nous connaissons.
Essayons dans un premier temps avec les fonctions constantes $f : x \longmapsto \lambda$
Procédons par analyse - synthèse (recherche du λ en supposant qu'une telle fonction est solution, puis vérification à partir des résultats obtenus).

* <u>Analyse :</u> Supposons que : $\exists\, f : x \mapsto \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$, continue sur $\mathbb{R}$, telle que f vérifie $\mathcal{E}$.

On a donc : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x+1) = \frac{1}{2} + \sqrt{f(x) - f(x)^2}$

$$\Rightarrow \quad \lambda = \frac{1}{2} + \sqrt{\lambda - \lambda^2}$$

$$\Rightarrow \quad \lambda - \frac{1}{2} = \sqrt{\lambda - \lambda^2}$$

$$\Rightarrow \quad \left(\lambda - \frac{1}{2}\right)^2 = \lambda - \lambda^2$$

$$\Rightarrow \quad \lambda^2 - \lambda + \frac{1}{4} = \lambda - \lambda^2$$

$$\Rightarrow \quad 2\lambda^2 - 2\lambda + \frac{1}{4} = 0$$

Etudions cette équation du second degré (en λ) :

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 2 \times \frac{1}{4} = 4 - 2 = 2 \quad > 0$$

D'où $\lambda_1 = \dfrac{-(-2) - \sqrt{2}}{2 \times 2} = \dfrac{2 - \sqrt{2}}{4}$

et $\lambda_2 = \dfrac{-(-2) + \sqrt{2}}{2 \times 2} = \dfrac{2 + \sqrt{2}}{4}$

* Synthèse : Nous venons de montrer que si une fonction constante f vérifie $\mathcal{E}$, alors elle est nécessairement égale à $\lambda_1 = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$ ou $\lambda_2 = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$

Vérifions maintenant si ces fonctions conviennent.

Tout d'abord, il est facile de voir que $f : x \mapsto \lambda_1$ ne convient pas car

$\lambda_1 = \frac{2-\sqrt{2}}{4} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4} \notin I = [\frac{1}{2} ; 1]$ déterminé précédemment.

Par contre, on a : $0 \leqslant \sqrt{2} \leqslant 2 \Rightarrow 2 \leqslant 2+\sqrt{2} \leqslant 4 \Rightarrow \frac{1}{2} \leqslant \frac{2+\sqrt{2}}{4} \leqslant 1$

$\Rightarrow \lambda_2 \in [\frac{1}{2} ; 1]$

Puis comme $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$, on a $f(x+1) = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$

D'autre part, $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} + \sqrt{f(x) - f(x)^2} &= \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4} - \left(\frac{2+\sqrt{2}}{4}\right)^2} \\
&= \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4} - \frac{4+4\sqrt{2}+2}{16}} \\
&= \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{8+\cancel{4\sqrt{2}}-4-\cancel{4\sqrt{2}}-2}{16}} \\
&= \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{2}{16}} \\
&= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4} \\
&= \frac{2+\sqrt{2}}{4}
\end{aligned}$$

Ainsi, on a bien : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x+1) = \frac{1}{2} + \sqrt{f(x) - f(x)^2}$

Donc la fonction constante f définie (et continue) sur $\mathbb{R}$ par $\boxed{f(x) = \frac{2+\sqrt{2}}{4}}$ vérifie la propriété $\mathcal{E}$.

2) La phase d'analyse de la question précédente (lorsque nous cherchions λ) peut nous mettre sur la voie :

On a : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x+1) = \frac{1}{2} + \sqrt{f(x) - f(x)^2}$

$$\Rightarrow f(x+1) - \frac{1}{2} = \sqrt{f(x) - f(x)^2}$$

$$\Rightarrow \left(f(x+1) - \frac{1}{2}\right)^2 = f(x) - f(x)^2$$

$$\Rightarrow f(x+1)^2 - f(x+1) + \frac{1}{4} = f(x) - f(x)^2 \qquad (E)$$

Nous pouvons remarquer ici que nous avons presque la même expression de part et d'autre de l'égalité. Nous pouvons la transformer légèrement :

$$(E) \Rightarrow f(x+1)^2 - f(x+1) + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = -f(x)^2 + f(x)$$

$$\Rightarrow f(x+1)^2 - f(x+1) + \frac{1}{8} = -f(x)^2 + f(x) - \frac{1}{8}$$

$$\Rightarrow f(x+1)^2 - f(x+1) + \frac{1}{8} = -\left(f(x)^2 - f(x) + \frac{1}{8}\right)$$

$$\Rightarrow u(x+1) = -u(x) \quad \text{en posant } \forall x \in \mathbb{R},\ u(x) = f(x)^2 - f(x) + \frac{1}{8}$$

Puis $u((x+1)+1) = -u(x+1) \iff u(x+2) = -(-u(x))$

$\iff u(x+2) = u(x)$

La fonction u est 2-périodique, donc la fonction f doit l'être aussi.

Rédigeons-le rigoureusement.

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x+2) = f\big((x+1)+1\big)$$
$$= \frac{1}{2} + \sqrt{f(x+1) - f(x+1)^2}$$
$$= \frac{1}{2} + \sqrt{f(x+1) \times \big(1 - f(x+1)\big)}$$
$$= \frac{1}{2} + \sqrt{\left(\frac{1}{2} + \sqrt{f(x) - f(x)^2}\right)\left(1 - \left(\frac{1}{2} + \sqrt{f(x) - f(x)^2}\right)\right)}$$
$$= \frac{1}{2} + \sqrt{\left(\frac{1}{2} + \sqrt{f(x) - f(x)^2}\right)\left(\frac{1}{2} - \sqrt{f(x) - f(x)^2}\right)}$$

3 ème identité remarquable

$$= \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \left(f(x) - f(x)^2\right)}$$
$$= \frac{1}{2} + \sqrt{f(x)^2 - f(x) + \frac{1}{4}}$$
$$= \frac{1}{2} + \sqrt{f(x)^2 - 2 \times \frac{1}{2} \times f(x) + \left(\frac{1}{2}\right)^2}$$

2 ème identité remarquable

$$= \frac{1}{2} + \sqrt{\left(f(x) - \frac{1}{2}\right)^2}$$
$$= \frac{1}{2} + \left| f(x) - \frac{1}{2} \right|$$

car d'après la question 1, $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geqslant \frac{1}{2}$

$$= \frac{1}{2} + f(x) - \frac{1}{2}$$
$$= f(x)$$

Donc une fonction f vérifiant $\mathcal{E}$ est forcément $\boxed{\text{2-périodique}}$

3) Pour cette question, nous pourrons soit essayer de construire une fonction f vérifiant les contraintes imposées par une méthode d'essais-erreurs qui peut être potentiellement laborieuse ou mener à une impasse, ou alors utiliser la fonction u introduite à la question 2 qui est définie comme une composée de f par un polynôme du second degré. Nous allons ici utiliser cette seconde méthode.

Tout d'abord, nous avons : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\begin{cases} \frac{1}{2} \leq f(x) \leq 1 \\ u(x) = f(x)^2 - f(x) + \frac{1}{8} \end{cases}$

On a ainsi : $f(x)^2 - f(x) + \frac{1}{8} - u(x) = 0$

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times \left(\frac{1}{8} - u(x)\right) = 1 - \frac{1}{2} + 4u(x) = \frac{1}{2} + 4u(x)$$

Ainsi, $\Delta \geq 0 \iff \frac{1}{2} + 4u(x) \geq 0 \iff 4u(x) \geq -\frac{1}{2} \iff u(x) \geq -\frac{1}{8}$

Etudions alors le signe de $u : x \mapsto f(x)^2 - f(x) + \frac{1}{8}$

Pour ce faire, introduisons la fonction v telle que $\forall x \in \mathbb{R}$, $u(x) = v(f(x))$

Comme $f(x) \in \left[\frac{1}{2} ; 1\right]$, en posant $X = f(x)$, on a :

$\forall X \in \left[\frac{1}{2} ; 1\right]$, $v(X) = X^2 - X + \frac{1}{8}$ fonction polynôme du second degré

v est dérivable sur $\left[\frac{1}{2} ; 1\right]$ en tant que polynôme, et $\forall X \in \left[\frac{1}{2} ; 1\right]$, $v'(X) = 2X - 1$

Ainsi, $v'(X) \geq 0 \iff 2X - 1 \geq 0 \iff 2X \geq 1 \iff X \geq \frac{1}{2}$

Donc v est croissante (strictement) sur $\left[\frac{1}{2} ; 1\right]$, et on a :

$v\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{8} = -\frac{1}{4} + \frac{1}{8} = -\frac{1}{8}$

et $v(1) = 1^2 - 1 + \frac{1}{8} = \frac{1}{8}$

Ainsi, on a :

$X = f(x)$	$\frac{1}{2}$		1
$f(x)^2 - f(x) + \frac{1}{8}$			$\frac{1}{8}$
	$-\frac{1}{8}$	$\nearrow$	

Ainsi, $\forall f(x) \in \left[\frac{1}{2} ; 1\right]$, $f(x)^2 - f(x) + \frac{1}{8} \geqslant -\frac{1}{8} \iff u(x) \geqslant -\frac{1}{8}$

Nous pouvons désormais reprendre la résolution de l'équation :

$f(x)^2 - f(x) + \frac{1}{8} - u(x) = 0$ de discriminant $\Delta = \frac{1}{2} + 4u(x)$

$u(x) \geqslant -\frac{1}{8}$ pour $f(x) \in \left[\frac{1}{2} ; 1\right]$ nous garantit que $\Delta \geqslant 0$

Puis $f(x) = \dfrac{-(-1) - \sqrt{\frac{1}{2} + 4u(x)}}{2 \times 1}$ ou $f(x) = \dfrac{-(-1) - \sqrt{\frac{1}{2} + 4u(x)}}{2 \times 1}$

$\iff f(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + 4u(x)}$ ou $f(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + 4u(x)}$

Par ailleurs, comme $f(x) \in \left[\frac{1}{2} ; 1\right]$, la solution $f(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + 4u(x)}$ ne peut pas convenir.

D'autre part, on a $-\frac{1}{8} \leqslant u(x) \leqslant \frac{1}{8} \Rightarrow -\frac{1}{2} \leqslant 4u(x) \leqslant \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow 0 \leqslant \frac{1}{2} + 4u(x) \leqslant 1$$

$$\Rightarrow 0 \leqslant \sqrt{\frac{1}{2} + 4u(x)} \leqslant 1$$

$$\Rightarrow 0 \leqslant \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + 4u(x)} \leqslant \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + 4u(x)} \leqslant 1$$

Donc $f(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + 4u(x)}$ convient

Regardons désormais les contraintes sur $u(x)$:

On veut $f(0) = \frac{1}{2} \Rightarrow u(0) = f(0)^2 - f(0) + \frac{1}{8} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4} - \frac{3}{8} = \frac{-1}{8}$

On veut donc : $u(0) = \frac{-1}{8}$; $u(x) \in \left[\frac{-1}{8} ; \frac{1}{8}\right]$; u 2-périodique ;

u continue sur $\mathbb{R}$ et $u(x+1) = -u(x)$

Pour les fonctions continues sur $\mathbb{R}$ qui sont 2-périodiques, on peut considérer $x \mapsto \cos(\pi x)$ et $x \mapsto \sin(\pi x)$, qui vérifient également $u(x+1) = -u(x)$

car $\forall x \in \mathbb{R}$, $\begin{cases} \cos(\pi(x+2)) = \cos(\pi x + 2\pi) = \cos(\pi x) \\ \cos(\pi(x+1)) = \cos(\pi x + \pi) = -\cos(\pi x) \\ \sin(\pi(x+2)) = \sin(\pi x + 2\pi) = \sin(\pi x) \\ \sin(\pi(x+1)) = \sin(\pi x + \pi) = -\sin(\pi x) \end{cases}$

Par contre, avec la contrainte $u(0) = -\frac{1}{8}$, on obtient :

$\cos(\pi \times 0) = 1$ et $\sin(\pi \times 0) = 0$

Aucune des deux ne convient, mais il est très facile de modifier $x \mapsto \cos(\pi x)$ pour qu'elle convienne et qu'elle vérifie $u(x) \in \left[-\frac{1}{8} ; \frac{1}{8}\right]$:

Prenons $u(x) = -\frac{1}{8}\cos(\pi x)$ qui vérifie : $\begin{cases} u(0) = -\frac{1}{8} \times \cos 0 = -\frac{1}{8} \\ -1 \leqslant \cos(\pi x) \leqslant 1 \Rightarrow -\frac{1}{8} \leqslant -\frac{1}{8}\cos(\pi x) \leqslant \frac{1}{8} \end{cases}$

Ce serait beaucoup plus difficile avec $x \mapsto \sin(\pi x)$.

Par ailleurs, on veut une infinité de fonctions. Pour y répondre à partir de notre fonction u, il suffit de prendre toutes les puissances impaires positives du cosinus qui permettent de conserver $u(x+1) = -u(x)$ grâce à l'imparité de la puissance.

On obtient donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $u_n(x) = -\frac{1}{8} \times (\cos(\pi x))^{2n+1}$

Les fonctions u_n ainsi définies sont continues sur $\mathbb{R}$ par les règles opératoires sur la continuité.

Finalement, on obtient les fonctions f_n suivantes, continues sur $\mathbb{R}$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + 4\, u(x)}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + 4 \times \frac{-1}{8} \times \left(\cos(\pi x)\right)^{2n+1}}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}\left(1 - \left(\cos(\pi x)\right)^{2n+1}\right)}$$

On vérifie qu'elles conviennent :

* $\forall n \in \mathbb{N}, \quad f_n(0) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}\left(1 - (\cos 0)^{2n+1}\right)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}(1-1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times 0 = \frac{1}{2}$

* D'une part, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_n(x+1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}\left(1 - \left(\cos(\pi(x+1))\right)^{2n+1}\right)}$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}\left(1 - \left(\cos(\pi x + \pi)\right)^{2n+1}\right)}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}\left(1 - \left(-\cos(\pi x)\right)^{2n+1}\right)}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \left(\cos(\pi x)\right)^{2n+1}\right)}$$

* D'autre part, calculons $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}$, $\frac{1}{2} + \sqrt{f_n(x) - f_n(x)^2}$

Tout d'abord, $f_n(x)^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}\left(1 - \left(\cos(\pi x)\right)^{2n+1}\right)} + \frac{1}{8}\left(1 - \left(\cos(\pi x)\right)^{2n+1}\right)$

Puis $f_n(x) - f_n(x)^2 = \frac{1}{2} + \cancel{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}\left(1 - \left(\cos(\pi x)\right)^{2n+1}\right)}} - \frac{1}{4} - \cancel{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}\left(1 - \left(\cos(\pi x)\right)^{2n+1}\right)}}$

$$- \frac{1}{8}\left(1 - \left(\cos(\pi x)\right)^{2n+1}\right)$$

ssi $f_n(x) - f_n(x)^2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{8}\left(1 - \left(\cos(\pi x)\right)^{2n+1}\right)$

$$= \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{2}\left(1 - \left(\cos(\pi x)\right)^{2n+1}\right)\right)$$

D'où $f_n(x) - f_n(x)^2 = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(\cos(\pi x))^{2n+1}\right)$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}(\cos(\pi x))^{2n+1}\right)$$

Finalement, $\frac{1}{2} + \sqrt{f_n(x) - f_n(x)^2} = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}(\cos(\pi x))^{2n+1}\right)}$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + (\cos(\pi x))^{2n+1}\right)}$$

Conclusion : Les fonctions $\boxed{f_n : x \longmapsto \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}\left(1 - (\cos(\pi x))^{2n+1}\right)}\ ,\ n \in \mathbb{N}}$

définies et continues sur $\mathbb{R}$ vérifient $\mathcal{E}$

car $\forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x+1) = \frac{1}{2} + \sqrt{f_n(x) - f_n(x)^2}$

en respectant la contrainte $f_n(0) = \frac{1}{2}$