

Mathsapiens.fr



Baccalauréat général

Session 2025

Asie – Remplacement

05 septembre 2025

Ex1:

Affirmation 1: VRAIE

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x \cdot e^{-2x}$$

On admet que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) &= 1 \times e^{-2x} + x \times (-2) \cdot e^{-2x} \\ &= (1-2x) \cdot e^{-2x} \end{aligned}$$

Affirmation 2: VRAIE

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) + 2f(x) &= (1-2x) \cdot e^{-2x} + 2 \cdot x \cdot e^{-2x} \\ &= e^{-2x} - \cancel{2x \cdot e^{-2x}} + \cancel{2x \cdot e^{-2x}} \\ &= e^{-2x} \end{aligned}$$

Affirmation 3: FAUSSE

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, f''(x) &= -2e^{-2x} + (1-2x) \cdot (-2 \cdot e^{-2x}) \\ &= (-2 - 2 + 4x) \cdot e^{-2x} \\ &= (-4 + 4x) e^{-2x} \\ &= 4(x-1) \cdot e^{-2x} \end{aligned}$$

Or $\forall x \in \mathbb{R}, 4 \cdot e^{-2x} > 0$ donc f'' est du signe de $x-1$

$$\text{Soit } x \in \mathbb{R}, f''(x) \geq 0 \Leftrightarrow x-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1 \Leftrightarrow x \in [1; +\infty[$$

Donc f est convexe sur $[1; +\infty[$

et f est concave sur $] -\infty; 1]$

Affirmation 4: VRAIE

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = (1-2x) \cdot e^{-2x}$$

Or $\forall x \in \mathbb{R}, e^{-2x} > 0$, donc f' est du signe de $1-2x$ sur $\mathbb{R}$

$$\text{Soit } x \in \mathbb{R}, f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 1-2x \geq 0 \Leftrightarrow -2x \geq -1 \Leftrightarrow x \leq \frac{1}{2}$$

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$		+	-
$f(x)$	$-\infty$	$\frac{1}{2e}$	0

$$\begin{aligned} \bullet \text{ on a : } & \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} -2x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \end{cases} \Rightarrow \text{Par composition, } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-2x} = +\infty \end{aligned}$$

Puis par opérations sur les limites, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

$$\bullet \text{ De plus, } f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot e^{-2 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{1}{2} e^{-1} = \frac{1}{2e} \approx 0,18 > 0$$

$$\bullet \text{ On a : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot e^{-2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \times \frac{2x}{e^{2x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \times \frac{x}{e^x} = 0$$

th. croissances comparées

ou pose $X = 2x$

• Sur $[\frac{1}{2}; +\infty[$, $f(x) > 0 > -1$ donc l'équation $f(x) = -1$ n'admet pas de solution.

• Sur $]-\infty; \frac{1}{2}[$, f est continue et strictement croissante.

$$-1 \in]-\infty; \frac{1}{2e}[= f\left(]-\infty; \frac{1}{2}[\right)$$

Donc d'après le théorème de la bijection (corollaire du TVI),

$$\exists ! \alpha \in]-\infty; \frac{1}{2}[, f(\alpha) = -1$$

• Par disjonction de cas, on a prouvé que l'équation $f(x) = -1$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$.

Affirmation 5: VRAIE

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, e^{-2x} > 0 \text{ donc } f(x) \geq 0$$

$$\text{Ainsi, } \forall x \in [0;1], f(x) \geq 0$$

De plus, f est continue (car dérivable) sur $[0;1]$

$$\text{Donc l'aire recherchée est : } \mathcal{A} = \int_0^1 f(x) \cdot dx = \int_0^1 x \cdot e^{-2x} dx$$

Procédons à une intégration par parties en posant les fonctions u et v suivantes, continûment dérivables sur $[0;1]$:

$$u(x) = x \quad \text{et} \quad v'(x) = e^{-2x}$$

$$u'(x) = 1 \quad \text{et} \quad v(x) = -\frac{1}{2} e^{-2x}$$

$$\begin{aligned} \text{D'où } \mathcal{A} &= \left[-\frac{1}{2} x \cdot e^{-2x} \right]_0^1 - \int_0^1 1 \times \frac{-1}{2} \cdot e^{-2x} dx \\ &= -\frac{1}{2} \times 1 \times e^{-2} + 0 + \frac{1}{2} \int_0^1 e^{-2x} dx \\ &= -\frac{e^{-2}}{2} + \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{2} e^{-2x} \right]_0^1 \\ &= -\frac{e^{-2}}{2} - \frac{1}{4} (e^{-2} - e^0) \\ &= -\frac{e^{-2}}{2} - \frac{1}{4} e^{-2} + \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{4} - \frac{3e^{-2}}{4} \end{aligned}$$

Ex 2:

1) Dans le R.O.N. $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$, on a :

$$A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, B \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, G \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, I \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Puis } \begin{cases} x_J = \frac{1}{2}(x_B + x_G) = \frac{1}{2}(1+1) = 1 \\ y_J = \frac{1}{2}(y_B + y_G) = \frac{1}{2}(0+1) = \frac{1}{2} \\ z_J = \frac{1}{2}(z_B + z_G) = \frac{1}{2}(0+1) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

D'où

$$J \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

2) a) On a : $\overrightarrow{AJ} \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$ vecteur directeur de (AJ) et $A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in (AJ)$

$$\text{D'où } (AJ) : \begin{cases} x = t \\ y = \frac{1}{2}t \\ z = \frac{1}{2}t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

⚠ Ne pas oublier

b) On a immédiatement $t_I = 0$ et $t_G = 1$ dans la représentation ^{paramétrique} proposée.Donc (IG) a pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}t \\ y = t \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

Rem: On pourrait aussi utiliser $\overrightarrow{IG} \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ vecteur directeur de (IG)
et $I \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in (IG)$

c) Comme $\overrightarrow{AJ} \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{IG} \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires, on peut se contenter de tester l'appartenance de $S \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$ à (AJ) et à (IG) .

$$\bullet \text{ Pour } (AJ) : \begin{cases} x_S = t \\ y_S = \frac{1}{2}t \\ z_S = \frac{1}{2}t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{2}{3} = t \\ \frac{1}{3} = \frac{1}{2}t \\ \frac{1}{3} = \frac{1}{2}t \end{cases} \Rightarrow t = \frac{2}{3} \quad \text{donc } S \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} \in (AJ)$$

$$\bullet \text{ Pour } (IG) : \begin{cases} x_S = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}t \\ y_S = t \\ z_S = t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{2}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}t \\ \frac{1}{3} = t \\ \frac{1}{3} = t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}t = \frac{1}{6} \\ t = \frac{1}{3} \\ t = \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow t = \frac{1}{3} \quad \text{donc } S \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} \in (IG)$$

Ainsi, $\begin{cases} (AJ) \text{ et } (IG) \text{ ne sont pas parallèles} \\ S \in (AJ) \\ S \in (IG) \end{cases} \Rightarrow (AJ) \cap (IG) = \left\{ S \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} \right\}$

• Remarque: Si on voulait étudier directement l'intersection, il fallait faire en sorte que les paramètres des droites (AJ) et (IG) soient différents

$$(AJ) \cap (IG) \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}t \\ \frac{1}{2}\lambda = t \\ \frac{1}{2}\lambda = t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2t = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}t \\ \lambda = 2t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{3}{2}t = \frac{1}{2} \\ \lambda = 2t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = \frac{1}{3} \\ \lambda = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Donc $(AJ) \cap (IG)$ est : $\begin{cases} \text{le point de } (AJ) \text{ de paramètre } \frac{2}{3} \\ \text{le point de } (IG) \text{ de paramètre } \frac{1}{3} \end{cases}$

D'où en utilisant (AJ) : $(AJ) \cap (IG) : \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \\ z = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \end{cases}$

i.e. $(AJ) \cap (IG) = \left\{ S \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} \right\}$

3) a) Dans le R.O.N., on a : $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AG} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{n} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \times 1 + (-1) \times 0 + 1 \times 0 = 0 + 0 + 0 = 0 \quad \text{donc } \vec{n} \perp \overrightarrow{AB}$$

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AG} = 0 \times 1 + (-1) \times 1 + 1 \times 1 = 0 - 1 + 1 = 0 \quad \text{donc } \vec{n} \perp \overrightarrow{AG}$$

$\vec{n}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AG}$ non colinéaires et directs du plan (ABG), donc $\vec{n} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est normal au plan (ABG)

b) $M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in (ABG) \Leftrightarrow \vec{n} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$
 $\Leftrightarrow 0 \times (x-0) + (-1) \times (y-0) + 1 \times (z-0) = 0$
 $\Leftrightarrow -y + z = 0$

(ou) $y - z = 0$

$$\textcircled{c} \begin{cases} \vec{n} \text{ dirige } (d) \\ \vec{n} \text{ normal à } (ABG) \end{cases} \Rightarrow (d) \perp (ABG)$$

donc (d) coupe (ABG) en un seul point.

Vérifions qu'il s'agit bien de $L \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$:

$$-y_L + z_L = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0 \quad \text{donc } L \in (ABG)$$

Puis on voit directement (sinon résoudre le système) que L est le point de (d) de paramètre $t_L = -\frac{1}{2}$ donc $L \in (d)$

$$\text{Ainsi, on a bien } (d) \cap (ABG) = \left\{ L \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \right\}$$

① On étudie l'intersection $(d) \cap (ABG)$

$$\begin{cases} -y + z = 0 \\ x = \frac{1}{2} \\ y = -t \\ z = 1+t \end{cases} \Rightarrow -(-t) + (1+t) = 0 \Rightarrow 2t + 1 = 0 \Rightarrow t = -\frac{1}{2}$$

$$\text{D'où } \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = -t = -\frac{-1}{2} = \frac{1}{2} \\ z = 1+t = 1 + \frac{-1}{2} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

et ainsi

$$(d) \cap (ABG) = \left\{ L \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \right\}$$

② Dans le R.O.N., on a : $\vec{AL} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $\vec{BL} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et $\vec{GL} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

On voit directement que toutes les composantes sont égales en valeur absolue, donc les normes des vecteurs vont être égales. Mais il faut le rédiger :

$$AL = \|\vec{AL}\| = \sqrt{\vec{AL}^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ u.l.}$$

$$BL = \|\vec{BL}\| = \sqrt{\vec{BL}^2} = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ u.l.}$$

$$GL = \|\vec{GL}\| = \sqrt{\vec{GL}^2} = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ u.l.}$$

On a $LA = LB = LG$ donc L est équidistant des points A, B et G .

4) Dans le cube $ABCDEFGH$, on a (AB) perpendiculaire à (BF) et à (BC)

Donc $(AB) \perp (BCF)$

Ainsi, (AB) est orthogonale à toute droite incluse dans (BCF) , en particulier à (BF)

Or $(AB) \cap (BF) = \{B\}$, d'où (AB) et (BF) sont perpendiculaires.

Ainsi, le triangle ABG est rectangle en B .

ou) Dans le R.O.N., on a $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BG} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

D'où $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BG} = 1 \times 0 + 0 \times 0 + 0 \times 1 = 0 + 0 + 0 = 0$ donc $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BG}$

Ainsi, ABG est rectangle en B

ou) la réciproque du théorème de Pythagore après avoir calculé AB , BG et AG .

$AB=1$, $BG=\sqrt{2}$ et $AG=\sqrt{3}$ (diagonales d'un carré et d'un cube de côté 1)

D'où $AG^2 = AB^2 + BG^2$, puis on conclut proprement.

5) a). Le centre du cercle circonscrit au triangle ABG est le point équidistant des 3 sommets. D'après la question 3.d), il s'agit du point L .

• Le centre de gravité du triangle ABG est l'intersection de ses médianes.

Or I est le milieu de $[AB]$, donc (IG) est la médiane de ABG issue de G .

et J ————— $[BG]$, donc (AJ) ————— A .

D'après la question 2.c), comme $(AJ) \cap (IG) = \{S\}$, le centre de gravité de ABG est le point S .

• L'orthocentre du triangle ABG est l'intersection de ses hauteurs.

Or d'après la question 4), ABG est rectangle en B .

Donc (AB) et (BG) sont des hauteurs du triangle ABG .

Ainsi l'orthocentre du triangle ABG est le point B .

• Conclusion: Dans le triangle ABG ,

- le centre du cercle circonscrit est le point $L(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2})$
- le centre de gravité est le point $S(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3})$
- l'orthocentre est le point $B(1; 0; 0)$

⑤ On a :

$$\overrightarrow{BS} \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{BL} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

On remarque que $\overrightarrow{BS} = \frac{2}{3} \overrightarrow{BL}$

Donc $\overrightarrow{BS}$ et $\overrightarrow{BL}$ sont colinéaires.

Ceci permet de conclure que les points B, S et L sont alignés.

Ex 3:

- 1) On répète $n=10$ fois de manière identique et indépendante une épreuve de Bernoulli dont la probabilité du succès "la réponse est correcte" est égale à : $p = \frac{1}{4}$

Donc X suit la loi binomiale de paramètres $n=10$ et $p = \frac{1}{4}$

$$X \sim \mathcal{B}\left(10; \frac{1}{4}\right)$$

2) $P(X=5) = \binom{10}{5} \times \left(\frac{1}{4}\right)^5 \times \left(1 - \frac{1}{4}\right)^{10-5} = \binom{10}{5} \times \left(\frac{1}{4}\right)^5 \times \left(\frac{3}{4}\right)^5 \approx 0,0584$ (à 10^{-4} près)

3) $X \sim \mathcal{B}\left(10; \frac{1}{4}\right)$ donc $E(X) = n \times p = 10 \times \frac{1}{4} = 10 \times 0,25 = 2,5$

Interprétation:

Pour un grand nombre de lancers, Dominique peut espérer obtenir en moyenne 2,5 bonnes réponses à chaque QCM de 10 questions.

- 4) a) L'événement $(Y=10)$ correspond à : "toutes les réponses sont correctes"

car on peut obtenir au maximum 10 points. Ainsi $(Y=10) = (X=10)$

D'où $P(Y=10) = P(X=10) = \binom{10}{10} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{10} \times \left(1 - \frac{1}{4}\right)^{10-10} = 1 \times \left(\frac{1}{4}\right)^{10} \times 1 = \left(\frac{1}{4}\right)^{10}$

b) On a $X(\Omega) = \llbracket 0; 10 \rrbracket$

Lorsqu'on a X bonnes réponses qui rapportent chacune 1 point, on a en même temps $10-X$ mauvaises réponses qui enlèvent chacune 0,5 point.

On veut donc $X \in \llbracket 0; 10 \rrbracket$ tq:

$$\begin{aligned} 1 \times X + (-0,5) \times (10-X) &\geq 0 &\Leftrightarrow X - 5 + 0,5X &\geq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{3}{2}X &\geq 5 \\ &\Leftrightarrow X &\geq \frac{10}{3} \end{aligned}$$

or $\frac{10}{3} \approx 3,3$ et $X \in \llbracket 0; 10 \rrbracket$, donc il faut $X \geq 4$

On a donc une note finale positive à partir de 4 bonnes réponses.

Rem: On pourrait également calculer la valeur de Y pour chaque valeur de X

X	0	1	2	3	4	5	...
Y	-5	-3,5	-2	-0,5	1	2,5	...

$\uparrow$ $0 \times 1 + 10 \times (-0,5)$ $\uparrow$ $2 \times 1 + 8 \times (-0,5)$ $\uparrow$ $4 \times 1 + 6 \times (-0,5)$

c) $P(Y \leq 0) = P(X \leq 3)$ d'après la question précédente

$\approx 0,78$ (à 10^{-2} près) d'après la fonction de répartition de la calculatrice

Rem: La consigne "calculer" est surprenante ici, car elle invite à effectuer le

calcul suivant: $P(Y \leq 0) = P(X \leq 3)$

$$= P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3)$$

$$= \binom{10}{0} \times \left(\frac{1}{4}\right)^0 \times \left(\frac{3}{4}\right)^{10} + \binom{10}{1} \times \left(\frac{1}{4}\right)^1 \times \left(\frac{3}{4}\right)^9 + \binom{10}{2} \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 \times \left(\frac{3}{4}\right)^8 + \binom{10}{3} \times \left(\frac{1}{4}\right)^3 \times \left(\frac{3}{4}\right)^7$$

=

d) Nous avons déjà répondu à cette question dans la 4.b).

$$Y = 1 \times X + (-0,5) \times (10 - X) = X - 5 + 0,5X = 1,5X - 5$$

pts par bonne réponse nb. de bonnes réponses pts par mauvaise réponse nb. de mauvaises réponses

e) Par linéarité de l'espérance, on a:

$$E(Y) = E(1,5X - 5)$$

$$= 1,5 \times E(X) - 5 \times E(1)$$

$$= 1,5 \times 2,5 - 5 \times 1$$

$$= \frac{3}{2} \times \frac{5}{2} - 5$$

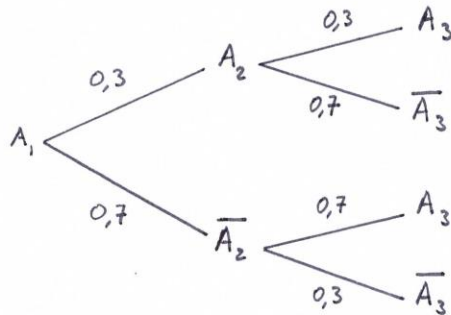
$$= \frac{15}{4} - \frac{20}{4}$$

$$= -\frac{5}{4} = -1,25$$

Ex4:

→ Partie A:

1)

2) $\{A_2; \bar{A}_2\}$ forme un système complet d'événements

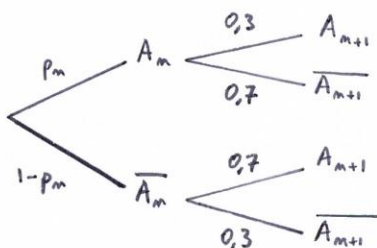
D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned}
 p_3 &= P(A_3) \\
 &= P(A_2 \cap A_3) + P(\bar{A}_2 \cap A_3) \\
 &= P(A_2) \times P_{A_2}(A_3) + P(\bar{A}_2) \times P_{\bar{A}_2}(A_3) \\
 &= 0,3 \times 0,3 + 0,7 \times 0,7 \\
 &= 0,09 + 0,49 \\
 &= \boxed{0,58}
 \end{aligned}$$

$$3) P_{A_3}(A_2) = \frac{P(A_2 \cap A_3)}{P(A_3)} = \frac{0,09}{0,58} = \frac{9}{58} \approx \boxed{0,16} \text{ (à } 10^{-2} \text{ près)}$$

→ Partie B:

1)



2) a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\{A_n, \bar{A}_n\}$ forme un système complet d'événements

D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned}
 p_{n+1} &= P(A_{n+1}) \\
 &= P(A_n \cap A_{n+1}) + P(\bar{A}_n \cap A_{n+1}) \\
 &= P(A_n) \times P_{A_n}(A_{n+1}) + P(\bar{A}_n) \times P_{\bar{A}_n}(A_{n+1}) \\
 &= p_n \times 0,3 + (1-p_n) \times 0,7 \\
 &= 0,3 p_n + 0,7 - 0,7 p_n \\
 &= \boxed{-0,4 p_n + 0,7}
 \end{aligned}$$

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
 u_{n+1} &= p_{n+1} - 0,5 \\
 &= -0,4 p_n + 0,7 - 0,5 \\
 &= -0,4 p_n + 0,2 \\
 &= -0,4 p_n + (-0,4) \times (-0,5) \\
 &= -0,4 \cdot (p_n - 0,5) \\
 &= -0,4 \cdot u_n
 \end{aligned}$$

Donc (u_n) est géométrique de raison $q = -0,4$

et de premier terme $u_1 = p_1 - 0,5 = 1 - 0,5 = \boxed{0,5}$

c) D'après la question précédente, on a:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = u_1 \cdot q^{n-1} = \boxed{0,5 \times (-0,4)^{n-1}} = \frac{1}{2} \times \left(-\frac{2}{5}\right)^{n-1} = \frac{1}{2} \times \frac{-5}{2} \times \left(\frac{-2}{5}\right)^n = \boxed{\frac{-5}{4} \times \left(\frac{-2}{5}\right)^n}$$

$$\text{Puis } \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad p_n = u_n + 0,5 = \boxed{0,5 \times (-0,4)^{n-1} + 0,5} = \boxed{\frac{1}{2} - \frac{5}{4} \times \left(\frac{-2}{5}\right)^n}$$

d) On a: $|q| < 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{-2}{5}\right)^n = 0$

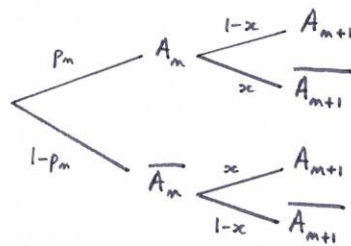
Puis par opérations sur les limites: $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = \frac{1}{2} - \frac{5}{4} \times 0 = \frac{1}{2}$

Donc (p_n) converge vers $\frac{1}{2}$

→ Partie C:

1) On a désormais:

avec $x \in]0;1[$



Comme précédemment, on a:

$$\begin{aligned}
 \forall n \in \mathbb{N}^*, p_{n+1} &= P(A_{n+1}) \\
 &= P(A_n) \times P_{A_n}(A_{n+1}) + P(\overline{A_n}) \times P_{\overline{A_n}}(A_{n+1}) \\
 &= p_n \times (1-x) + (1-p_n) \times x \\
 &= p_n - x \cdot p_n + x - x \cdot p_n \\
 &= (1-2x) \cdot p_n + x
 \end{aligned}$$

2) Démontrons par récurrence que: $\forall n \in \mathbb{N}^*, p_n = \frac{1}{2} (1-2x)^{n-1} + \frac{1}{2}$

Notons cette propriété $\mathcal{P}(n)$

Initialisation: Pour $n=1$

on a: $\frac{1}{2} (1-2x)^{1-1} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times (1-2x)^0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{2} = 1 = p_1$

$\Rightarrow \mathcal{P}(1)$ vraie

Hérédité: Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons que $p_n = \frac{1}{2} (1-2x)^{n-1} + \frac{1}{2}$
 et montrons que $p_{n+1} = \frac{1}{2} (1-2x)^n + \frac{1}{2}$

D'après la question C.1), on a:

$$\begin{aligned}
 p_{n+1} &= (1-2x) \cdot p_n + x \\
 &= (1-2x) \cdot \left(\frac{1}{2} (1-2x)^{n-1} + \frac{1}{2} \right) + x \quad \text{d'après (H.R.)} \\
 &= \frac{1}{2} (1-2x)^n + \frac{1}{2} (1-2x) + x \\
 &= \frac{1}{2} (1-2x)^n + \frac{1}{2} \cancel{-2x} + \cancel{x} \\
 &= \frac{1}{2} (1-2x)^n + \frac{1}{2} \Rightarrow \mathcal{P}_{(n+1)} \text{ vraie}
 \end{aligned}$$

Conclusion: $\mathcal{P}_{(n)}$ vraie pour $n=1$ et héréditaire à partir de ce rang, donc d'après le principe de récurrence:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, p_n = \frac{1}{2} (1-2x)^{n-1} + \frac{1}{2}$$

$$3) \quad \forall x \in]0;1[, \quad -2 < -2x < 0 \quad \Rightarrow \quad -1 < 1-2x < 1$$

$$\text{D'où } \lim_{n \rightarrow +\infty} (1-2x)^{n-1} = 0 \quad \text{car } \lim_{n \rightarrow +\infty} n-1 = +\infty$$

Puis par opérations sur les limites, on obtient:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = \frac{1}{2} \times 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Donc (p_n) converge vers $\frac{1}{2}$