

Mathsapiens.fr



Baccalauréat général

Session 2025

Amérique du Nord – Sujet 2

22 mai 2025

Ex 1:

 $\Rightarrow$ Partie A:1) On effectue $n = 15$ lancers identiques et indépendants. N compte le nombre de paniers marqués, donc $p = 0,32$ Ainsi, $N \sim \mathcal{B}(15; 0,32)$

$$2) P(N=4) = \binom{15}{4} \times p^4 \times (1-p)^{15-4} = \frac{15!}{4!(15-4)!} \times 0,32^4 \times 0,68^{11}$$

D'où $P(N=4) \approx 0,206$ à 10^{-3} près

3) On utilise la fonction de répartition de la calculatrice:

$$P(N \leq 6) \approx 0,828 \text{ à } 10^{-3} \text{ près}$$

$$4) N \sim \mathcal{B}(15; 0,32) \text{ donc } E(N) = n \times p = 15 \times 0,32 = 4,8$$

$$5) \text{ a) chaque lancer marqué rapporte 3 points, donc } T = 3N$$

$$\text{ b) Par linéarité de l'espérance: } E(T) = E(3N) = 3 \cdot E(N) = 3 \times 4,8 = 14,4$$

Interprétation: S'il effectue un grand nombre de séries, Victor peut en moyenne espérer marquer 14,4 points par série.

$$\text{ c) Tout d'abord, } 12 \leq T \leq 18 \Leftrightarrow 12 \leq 3N \leq 18 \Leftrightarrow 4 \leq N \leq 6$$

$$\begin{aligned} \text{D'où } P(12 \leq T \leq 18) &= P(4 \leq N \leq 6) \\ &= P(N \leq 6) - P(N \leq 3) \\ &\approx 0,8278 - 0,2420 \\ &\approx 0,586 \text{ (à } 10^{-3} \text{ près)} \end{aligned}$$

↗ fonction de répartition de la calculatrice

$\Rightarrow$ Partie B:

$$1) \text{ a) } M_{50} = \frac{1}{50} \times \sum_{h=1}^{50} X_h$$

M_{50} représente la variable aléatoire donnant le nombre moyen de points marqués par Victor en 50 matchs.

b) $\forall h \in \llbracket 1; n \rrbracket$, les X_h sont indépendantes et identiquement distribuées. Ainsi, par linéarité de l'espérance, on a :

$$E(M_{50}) = E\left(\frac{1}{50} \times \sum_{h=1}^{50} X_h\right) = \frac{1}{50} \times E\left(\sum_{h=1}^{50} X_h\right) = \frac{1}{50} \times \sum_{h=1}^{50} E(X_h)$$

$$\text{D'où } E(M_{50}) = \frac{1}{50} \times 50 \times E(X) = E(X) = \boxed{22}$$

$$\text{Puis } V(M_{50}) = V\left(\frac{1}{50} \times \sum_{h=1}^{50} X_h\right) = \left(\frac{1}{50}\right)^2 \times V\left(\sum_{h=1}^{50} X_h\right)$$

Par indépendance des X_h , on a alors :

$$V(M_{50}) = \frac{1}{50^2} \times \sum_{h=1}^{50} V(X_h) = \frac{1}{50^2} \times 50 \times V(X)$$

$$\Leftrightarrow V(M_{50}) = \frac{1}{50} \times 65 = \frac{13}{10} = \boxed{1,3}$$

Rem: On peut aussi directement utiliser les formules
$$\begin{cases} E(M_n) = E(X) \\ V(M_n) = \frac{1}{n} V(X) \end{cases}$$

c) On applique l'inégalité de Bienaymé - Tchebychev :

$$\forall \delta > 0, P(|X - E(X)| \geq \delta) \leq \frac{V(X)}{\delta^2}$$

On choisit $\delta = 3$ et on utilise la variable aléatoire M_{50}

avec $E(M_{50}) = 22$ et $V(M_{50}) = 1,3$

$$P(|M_{50} - E(M_{50})| \geq 3) \leq \frac{V(M_{50})}{3^2}$$

$$\Leftrightarrow P(|M_{50} - 22| \geq 3) \leq \frac{1,3}{9}$$

$$\Leftrightarrow P(|M_{50} - 22| \geq 3) \leq \frac{13}{90}$$

d) On utilise le résultat précédent :

$$P(|M_{50} - 22| \geq 3) \leq \frac{13}{90}$$

$$\Leftrightarrow 1 - P(|M_{50} - 22| \geq 3) \geq 1 - \frac{13}{90}$$

$$\Leftrightarrow 1 - P(|M_{50} - 22| \geq 3) \geq 1 - \frac{13}{90}$$

$$\Leftrightarrow P(|M_{50} - 22| < 3) \geq \frac{90-13}{90}$$

$$\Leftrightarrow P(-3 < M_{50} - 22 < 3) \geq \frac{77}{90}$$

$$\Leftrightarrow P(19 < M_{50} < 25) \geq \frac{77}{90}$$

$$\text{Or } \frac{77}{90} > \frac{76,5}{90} \text{ et } \frac{76,5}{90} = 0,85$$

$$\text{Donc par transitivité, } P(19 < M_{50} < 25) > 0,85$$

2) D'après l'inégalité de concentration, on a :

$$\forall \delta > 0, P(|M_n - E(X)| \geq \delta) \leq \frac{V(X)}{n \cdot \delta^2}$$

On a $E(X) = 22$, $V(X) = 65$ et on prend $\delta = 3$

$$\text{D'où } P(|M_n - 22| \geq 3) \leq \frac{65}{3^2 \times n}$$

On veut $P(|M_n - 22| \geq 3) < 0,01$

$$\begin{aligned} \text{Donc il suffit d'avoir } \frac{65}{3^2 \times n} < 0,01 &\Leftrightarrow \frac{65}{9n} < 10^{-2} \\ &\Leftrightarrow 9n > 65 \times 10^2 \\ &\Leftrightarrow n > \frac{6500}{9} \end{aligned}$$

On $\frac{6500}{9} \approx 722,2$ et on veut $n \in \mathbb{N}^*$

Donc en prenant $n \geq 723$, on a $P(|M_n - 22| \geq 3) < 0,01$

L'affirmation était donc fausse.

Ex2:

$\Rightarrow$ Partie A: $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{u_n}$

1) a) $u_1 = \sqrt{u_0} = \sqrt{2}$ et $u_2 = \sqrt{u_1} = \sqrt{\sqrt{2}}$

b) Il semble que (u_n) soit strictement décroissante et converge vers 1.

2) a) Démontrons par récurrence $P(n)$: $\forall n \in \mathbb{N}, 1 \leq u_{n+1} \leq u_n$

Initialisation: Pour $n=0$, on a $u_0 = 2$ et $u_1 = \sqrt{2}$

Donc on a bien $1 \leq u_1 \leq u_0 \Rightarrow P(0)$ vraie

Hérédité: Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $1 \leq u_{n+1} \leq u_n$

et montrons que $1 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1}$

D'après (HR): $1 \leq u_{n+1} \leq u_n$

$$\Rightarrow \sqrt{1} \leq \sqrt{u_{n+1}} \leq \sqrt{u_n} \quad \left. \begin{array}{l} \text{par croissance} \\ \text{de } \sqrt{\cdot} \text{ sur } \mathbb{R}_+ \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow 1 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1}$$

$$\Rightarrow P(n+1) \text{ vraie}$$

Conclusion: $P(n)$ est vraie pour $n=0$ et héréditaire à partir de ce rang, donc d'après le principe de récurrence:

$$\forall n \in \mathbb{N}, 1 \leq u_{n+1} \leq u_n$$

b) D'après la question précédente, on a:

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \leq u_n \Rightarrow (u_n) \text{ est décroissante} \\ \forall n \in \mathbb{N}, 1 \leq u_n \Rightarrow (u_n) \text{ est minorée (par 1)} \end{cases}$$

Donc d'après le théorème de la limite monotone, (u_n) converge vers un réel $l \geq 1$.

$$\begin{aligned}
 \textcircled{c} \text{ Soit } x \in [0; +\infty[, \quad \sqrt{x} = x &\Leftrightarrow x = x^2 \text{ et } x \geq 0 \\
 &\Leftrightarrow x^2 - x = 0 \text{ et } x \geq 0 \\
 &\Leftrightarrow x(x-1) = 0 \text{ et } x \geq 0 \\
 &\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 1
 \end{aligned}$$

$$\mathcal{S} = \{0; 1\}$$

$$\textcircled{d} \text{ On a : } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \text{ avec } f: x \mapsto \sqrt{x} \text{ continue sur } \mathbb{R}_+$$

Par ailleurs, d'après la question 2.b), nous savons que (u_n) converge vers $l \geq 1$.

D'après le théorème du point fixe, l est solution de l'équation:

$$f(l) = l \Leftrightarrow \sqrt{l} = l \Leftrightarrow l = 0 \text{ ou } l = 1$$

d'après 2.c)

(u_n) étant décroissante et minorée par 1, seule la solution

$$l = 1 \text{ convient. D'où } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$$

$$\Rightarrow \text{Partie B: } \forall n \in \mathbb{N}, v_n = \ln(u_n)$$

$$1) \textcircled{a} \quad \forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = \ln(u_{n+1}) = \ln(\sqrt{u_n}) = \frac{1}{2} \ln(u_n) = \frac{1}{2} v_n$$

$$\text{Donc } (v_n) \text{ est géométrique de raison } q = \frac{1}{2}$$

$$\textcircled{b} \text{ On a } v_0 = \ln(u_0) = \ln(2)$$

$$\text{D'où } \forall n \in \mathbb{N}, v_n = v_0 \cdot q^n = \ln(2) \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{\ln(2)}{2^n}$$

$$\textcircled{c} \quad \forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{\ln(2)}{2^n} \Leftrightarrow \ln(2) = 2^n \cdot v_n \Leftrightarrow \ln(2) = 2^n \times \ln(u_n)$$

- 2) a) (u_n) est décroissante et on a : $u_6 \approx 1,011 \notin]0,99; 1,01[$
 $u_7 \approx 1,005 \in]0,99; 1,01[$

Donc $k=7$ est le plus petit entier naturel tq $u_k \in]0,99; 1,01[$

Puis $u_7 \approx 1,00543$ à 10^{-5} près

- b) D'après l'énoncé, on prend $\ln(x) \approx x-1$ si $x \in]0,99; 1,01[$

Comme $u_7 \in]0,99; 1,01[$, on a :

$$\ln(u_7) \approx u_7 - 1 \approx 0,00543 \text{ à } 10^{-3} \text{ près}$$

- c) D'après la question 1.c), $\forall n \in \mathbb{N}$, $\ln(z) = 2^n \times \ln(u_n)$

D'où pour $n=7$, on obtient :

$$\ln(z) = 2^7 \times \ln(u_7) = 128 \times \ln(u_7) \approx 128 \times 0,00543$$

$$\Rightarrow \ln(z) \approx 0,69504$$

- 3) la boucle "while" permet ^{si nécessaire} de faire entrer $a > 1$ dans $]0,99; 1,01[$.

Une fois cet objectif atteint, on utilise la méthode de la question 2).

On approxime ainsi " $\ln(a)$ " par " $a-1$ " comme dans la question 2.b), puis on multiplie cette valeur par " 2^n " comme dans la question 2.c).

On complète ainsi le script en écrivant dans l'avant-dernière ligne :

$$L = (2^{**}n) * (a-1)$$

```
from math import *
def Briggs(a):
    n=0
    while a >= 1.01:
        a=sqrt(a)
        n=n+1
    L=(2**n)*(a-1)
    return L
```

Ex 3: $\Rightarrow$ Partie A:* Affirmation 1: Vraie

$$\begin{aligned}
\text{On a : } 2\overrightarrow{BI} + \overrightarrow{DM} - \overrightarrow{CB} &= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DM} + \overrightarrow{BC} && \text{car } I \text{ milieu de } [AB] \\
&= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AK} + \overrightarrow{BC} && \text{car } \overrightarrow{DM} = \overrightarrow{AK} \\
&= \overrightarrow{BK} + \overrightarrow{BC} \\
&= \overrightarrow{BK} + \overrightarrow{KM} && \text{car } \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{KM} \\
&= \overrightarrow{BM} \\
&= \overrightarrow{JH} && \text{car } \overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{MH}
\end{aligned}$$

* Affirmation 2: Fausse

$$\text{On a : } \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{HG} \quad \text{donc} \quad \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HG} = \overrightarrow{AG}$$

$$\text{Ainsi, } \exists (\lambda; \mu) \in \mathbb{R}^2, \quad \overrightarrow{AG} = \lambda \overrightarrow{AH} + \mu \overrightarrow{AB}$$

Donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{AG}$ sont coplanaires.

Ils ne peuvent ainsi pas former une base de l'espace.

* Affirmation 3: Vraie

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{IB} \cdot \overrightarrow{LM} &= \overrightarrow{IB} \cdot \overrightarrow{IK} && \text{car } \overrightarrow{LM} = \overrightarrow{IK} \\
&= \overrightarrow{IB} \cdot \overrightarrow{IA} && \text{car } A \text{ est le projeté de } K \text{ sur } (IB) \\
&= -IB \times IA && \text{car } \overrightarrow{IB} \text{ et } \overrightarrow{IA} \text{ colinéaires de sens contraire} \\
&= -\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} && \text{car } I \text{ milieu de } [AB] \text{ et } AB=1 \\
&= -\frac{1}{4}
\end{aligned}$$

Rem: Cette partie A ne nécessitant l'emploi de coordonnées, mais on pourrait si on le souhaitait utiliser le R.O.N. ($A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}$).

$\Rightarrow$ Partie B:

* Affirmation 4: Fausse

Dans le R.O.N., on a $A\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$ et $B\left(\begin{smallmatrix} 5 \\ -3 \\ 7 \end{smallmatrix}\right)$, d'où $\overrightarrow{AB}\left(\begin{smallmatrix} 3 \\ -3 \\ 8 \end{smallmatrix}\right)$

De plus, $\vec{n}\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)$ est normal au plan $\mathcal{P}$

$$\text{Puis } \vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 2 \times 3 + (-1) \times (-3) + 3 \times 8 = 6 + 3 + 24 = 33 \neq 0$$

$\overrightarrow{AB}$ directeur de (AB) n'est pas orthogonal à $\vec{n}$ vecteur normal du plan $\mathcal{P}$, donc (AB) n'est pas parallèle à $\mathcal{P}$

* Affirmation 5: Vraie

$\mathcal{P}' \parallel \mathcal{P}$ donc $\vec{n}\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)$ est aussi normal à $\mathcal{P}'$

Puis $B\left(\begin{smallmatrix} 5 \\ -3 \\ 7 \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{P}'$, d'où $M\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{P}' \Leftrightarrow \vec{n} \cdot \overrightarrow{BM} = 0$

$$\Leftrightarrow 2(x-5) + (-1)(y+3) + 3(z-7) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x - 10 - y - 3 + 3z - 21 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x - y + 3z - 34 = 0$$

$$\Leftrightarrow -2x + y - 3z + 34 = 0$$

* Affirmation 6: Vraie

Notons H le projeté orthogonal de $A\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$ sur $\mathcal{P}$.

Ainsi, $(AH) \perp \mathcal{P}$, donc $\vec{n}\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)$ est un vecteur directeur de (AH) .

Puis une représentation paramétrique de (AH) :

$$(AH): \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -t \\ z = -1 + 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

$$\text{Puis } (AH) \cap \mathcal{P} : \begin{cases} 2x_H - y_H + 3z_H + 6 = 0 \\ x_H = 2 + 2t_H \\ y_H = -t_H \\ z_H = -1 + 3t_H \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2(2 + 2t_H) - (-t_H) + 3(-1 + 3t_H) + 6 = 0$$

$$\Rightarrow 4 + 4t_H + t_H - 3 + 9t_H + 6 = 0$$

$$\Rightarrow 14t_H + 7 = 0$$

$$\Rightarrow t_H = -\frac{7}{14}$$

$$\Rightarrow t_H = -\frac{1}{2}$$

$$\text{D'où } H : \begin{cases} x_H = 2 + 2t_H = 2 + 2 \times -\frac{1}{2} = 2 - 1 = 1 \\ y_H = -t_H = -(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} \\ z_H = -1 + 3t_H = -1 + 3 \times -\frac{1}{2} = -1 - \frac{3}{2} = -\frac{5}{2} \end{cases}$$

Enfin, dans le R.O.N. on a : $A \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $H \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{5}{2} \end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{AH} \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$

$$\text{Puis } \text{dist}(A; \mathcal{P}) = AH = \|\overrightarrow{AH}\| = \sqrt{\overrightarrow{AH}^2} = \sqrt{(-1)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{3}{2}\right)^2}$$

$$\Leftrightarrow \text{dist}(A; \mathcal{P}) = \sqrt{1 + \frac{1}{4} + \frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{14}{4}} = \frac{\sqrt{14}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{14}}{2}$$

* Affirmation 7 : Fausse

On a $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$ directeur de (d) et $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 8 \end{pmatrix}$ directeur de (AB)

$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \vec{u} \neq \lambda \cdot \overrightarrow{AB}$ car $\vec{u}$ possède une unique composante nulle alors que $\overrightarrow{AB}$ n'en a aucune.

Ainsi, (d) et (AB) ne sont pas parallèles car $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AB}$ ne sont pas colinéaires. Étudions l'éventuelle intersection de (d) et de (AB) pour savoir si elles sont sécantes ou non coplanaires.

On a : $(d) : \begin{cases} x = -12 + 2k \\ y = 6 \\ z = 3 - 5k \end{cases}, k \in \mathbb{R}$ et $(AB) : \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = -3t \\ z = -1 + 8t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

D'où $(d) \cap (AB) : \begin{cases} -12 + 2k = 2 + 3t \\ 6 = -3t \\ 3 - 5k = -1 + 8t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2k = 14 + 3t \\ t = -2 \\ 5k = 4 - 8t \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{1}{2} (14 + 3 \times (-2)) \\ t = -2 \\ k = \frac{1}{5} (4 - 8 \times (-2)) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{1}{2} \times 8 \\ t = -2 \\ k = \frac{1}{5} \times 20 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} k = 4 \\ t = -2 \\ k = 4 \end{cases} \begin{matrix} \nearrow \\ \nwarrow \end{matrix} \text{ compatibles}$

Donc (d) et (AB) sont sécantes en I , point de paramètre $k = 4$ de (d) , qui est également le point de paramètre $t = -2$ de (AB) .

Ainsi, (d) et (AB) sont coplanaires.

Ex 4:

$\Rightarrow$ Partie A: $\forall x \in [0; \pi], f(x) = e^x \cdot \sin(x)$

1) a) f est dérivable sur $[0; \pi]$ comme produit de fonctions dérivables sur $[0; \pi]$.

$$\forall x \in [0; \pi], f'(x) = e^x \times \sin(x) + e^x \times \cos(x) \\ = e^x (\sin(x) + \cos(x))$$

Il s'agit d'une dérivée de la forme: $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

$$\text{avec } u(x) = e^x \quad \text{et } v(x) = \sin(x) \\ u'(x) = e^x \quad v'(x) = \cos(x)$$

b) $\forall x \in [0; \frac{\pi}{2}], e^x > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $\sin(x) + \cos(x)$

$$\text{or : } \forall x \in [0; \frac{\pi}{2}[, \cos(x) > 0 \quad \text{et} \quad \cos(\frac{\pi}{2}) = 0$$

$$\text{et } \forall x \in]0; \frac{\pi}{2}], \sin(x) > 0 \quad \text{et} \quad \sin(0) = 0$$

$$\text{Donc par somme, } \forall x \in [0; \frac{\pi}{2}], \sin(x) + \cos(x) > 0$$

$$\text{D'où } \forall x \in [0; \frac{\pi}{2}], f'(x) > 0$$

La fonction f est donc strictement croissante sur $[0; \frac{\pi}{2}]$

$$2) \text{ a) On a : } f(0) = e^0 \times \sin(0) = 1 \times 0 = 0$$

$$\text{et } f'(0) = e^0 (\sin(0) + \cos(0)) = 1 \times (0 + 1) = 1$$

$$\text{D'où } T: y = f'(0) \times (x - 0) + f(0)$$

$$\Leftrightarrow y = 1 \times x + 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{y = x}$$

T est la première bissectrice.

- ⑥ f' est dérivable sur $[0; \frac{\pi}{2}]$ comme somme puis produit de fonctions dérivables sur $[0; \frac{\pi}{2}]$.

$$\begin{aligned}\forall x \in [0; \frac{\pi}{2}], f''(x) &= e^x (\sin(x) + \cos(x)) + e^x (\cos(x) - \sin(x)) \\ &= e^x (\cancel{\sin(x)} + \cos(x) + \cos(x) - \cancel{\sin(x)}) \\ &= 2e^x \cdot \cos(x)\end{aligned}$$

On $\forall x \in [0; \frac{\pi}{2}], e^x > 0$ et $\cos(x) \geq 0$

D'où $\forall x \in [0; \frac{\pi}{2}], f''(x) \geq 0$

Ainsi, f est convexe sur $[0; \frac{\pi}{2}]$

- ⑦ f est convexe sur $[0; \frac{\pi}{2}]$, donc $\mathcal{E}_f$ est située au-dessus de toutes ses tangentes sur cet intervalle.

Notamment en $x=0$, on a $\mathcal{E}_f$ au-dessus de T d'eq. $y=x$

Ceci se traduit par : $\forall x \in [0; \frac{\pi}{2}], e^x \cdot \sin(x) \geq x$

- 3) L'expression de f'' est également valable sur $[0; \pi]$.

Ainsi, $\forall x \in [0; \pi], f''(x) = 2e^x \cdot \cos(x)$

$\forall x \in [0; \pi], 2e^x > 0$ donc f'' est du signe de $\cos(x)$

$$\text{On a : } \begin{cases} \forall x \in [0; \frac{\pi}{2}[, \cos(x) > 0 \\ \cos(\frac{\pi}{2}) = 0 \\ \forall x \in]\frac{\pi}{2}; \pi], \cos(x) < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f''(x) > 0 \text{ sur } [0; \frac{\pi}{2}[\\ f''(\frac{\pi}{2}) = 0 \\ f''(x) < 0 \text{ sur }]\frac{\pi}{2}; \pi] \end{cases}$$

f'' s'annule et change de signe en $x = \frac{\pi}{2}$

Donc le point de $\mathcal{E}_f$ d'abscisse $\frac{\pi}{2}$ est un point d'inflexion

$$\Rightarrow \text{Partie B :} \quad I = \int_0^{\pi/2} e^x \cdot \sin(x) \cdot dx \quad \text{et} \quad J = \int_0^{\pi/2} e^x \cdot \cos(x) \cdot dx$$

1) Procédons à une première IPP pour I en posant les fonctions u et v suivantes continûment dérivables sur $[0; \frac{\pi}{2}]$:

$$u(x) = e^x \quad \text{et} \quad v'(x) = \sin(x)$$

$$u'(x) = e^x \quad \text{et} \quad v(x) = -\cos(x)$$

$$\text{D'où } I = \left[-e^x \cdot \cos(x) \right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} -e^x \cdot \cos(x) \cdot dx$$

$$\Leftrightarrow I = -e^{\pi/2} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + e^0 \cdot \cos(0) + \int_0^{\pi/2} e^x \cdot \cos(x) \cdot dx$$

$$\Leftrightarrow I = -e^{\pi/2} \times 0 + 1 \times 1 + J$$

$$\Leftrightarrow \boxed{I = 1 + J}$$

Procédons maintenant de même en changeant les rôles des fonctions u et v :

$$u(x) = \sin(x) \quad \text{et} \quad v'(x) = e^x$$

$$u'(x) = \cos(x) \quad \text{et} \quad v(x) = e^x$$

$$\text{D'où } I = \left[e^x \cdot \sin(x) \right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} e^x \cdot \cos(x) \cdot dx$$

$$\Leftrightarrow I = e^{\pi/2} \times \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - e^0 \times \sin(0) - J$$

$$\Leftrightarrow I = e^{\pi/2} \times 1 - 1 \times 0 - J$$

$$\Leftrightarrow \boxed{I = e^{\pi/2} - J}$$

$$2) \text{ On a : } \begin{cases} I = 1 + J \\ I = e^{\pi/2} - J \end{cases}$$

$$\text{Donc par somme : } 2I = 1 + \cancel{J} + e^{\pi/2} - \cancel{J}$$

$$\Leftrightarrow 2I = 1 + e^{\pi/2}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{I = \frac{1 + e^{\pi/2}}{2}}$$

Rem: On pourrait également obtenir par différence que $J = \frac{e^{\pi/2} - 1}{2}$

3) Les fonctions f et g sont continues (car dérivables) sur $[0; \frac{\pi}{2}]$

Par ailleurs, d'après la question 2.c) de la partie A, on a :

$$\begin{aligned} \forall x \in [0; \frac{\pi}{2}] , \quad e^x \cdot \sin(x) \geq x &\Leftrightarrow f(x) \geq g(x) \\ &\Leftrightarrow f(x) - g(x) \geq 0 \end{aligned}$$

Ainsi, l'aire $\mathcal{A}$ du domaine hachuré situé entre $\mathcal{C}_f$, $\mathcal{C}_g$ et les droites d'équation $x=0$ et $x=\frac{\pi}{2}$ vaut :

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \int_0^{\pi/2} (f(x) - g(x)) \cdot dx \\ &= \int_0^{\pi/2} f(x) \cdot dx - \int_0^{\pi/2} g(x) \cdot dx && \text{par linéarité de l'intégrale} \\ &= \int_0^{\pi/2} e^x \cdot \sin(x) \cdot dx - \int_0^{\pi/2} x \cdot dx \\ &= I - \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_0^{\pi/2} \\ &= \boxed{\frac{1 + e^{\pi/2}}{2} - \frac{\pi^2}{8}} \quad \text{u.a.} \end{aligned}$$