

Mathsapiens.fr



Baccalauréat général

Session 2025

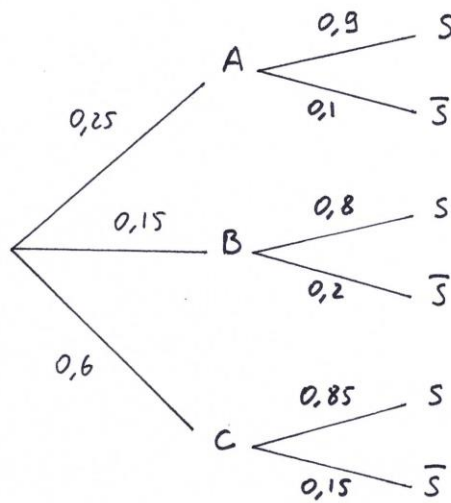
Amérique du Nord – Sujet 1

21 mai 2025

Ex1:

 $\Rightarrow$ Partie A:

1)



$$2) P(B \cap S) = P(B) \times P_B(S) = 0,15 \times 0,8 = \boxed{0,12}$$

$$3) P(C \cap \bar{S}) = P(C) \times P_C(\bar{S}) = 0,6 \times 0,15 = \boxed{0,09}$$

Interprétation: La probabilité que la connexion passe par le serveur C et ne soit pas stable est égale à 0,09.

4) $\{A; B; C\}$ forme un système complet d'événements.

D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} P(S) &= P(A \cap S) + P(B \cap S) + P(C \cap S) \\ &= P(A) \times P_A(S) + 0,12 + P(C) \times P_C(S) \\ &= 0,25 \times 0,9 + 0,12 + 0,6 \times 0,85 \\ &= 0,225 + 0,12 + 0,51 \\ &= \boxed{0,855} \end{aligned}$$

$$5) P_S(B) = \frac{P(B \cap S)}{P(S)} = \frac{0,12}{0,855} = \frac{120}{855} = \frac{8}{57} \approx \boxed{0,140} \quad (\text{à } 10^{-3} \text{ près})$$

important !

⇒ Partie B :

- 1) a) On répète $n = 50$ fois de façon identique et indépendante une expérience de Bernoulli dont la probabilité du succès "la connexion est instable" est égale à $p = P(\bar{S}) = 0,145$

Donc X suit la loi binomiale de paramètres $n = 50$ et $p = 0,145$

$$X \sim \mathcal{B}(50; 0,145)$$

- b) En utilisant la fonction de répartition de la calculatrice, on obtient:

$$P(X \leq 8) \approx 0,704 \quad (\text{à } 10^{-3} \text{ près})$$

- 2) a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n \sim \mathcal{B}(n; 0,145)$

$$p_n = P(X_n \geq 1) = 1 - P(X_n = 0) = 1 - \binom{n}{0} \times 0,145^0 \times (1 - 0,145)^{n-0}$$

$$\Leftrightarrow p_n = 1 - 1 \times 1 \times 0,855^n = 1 - 0,855^n$$

$$\text{Donc } \forall n \in \mathbb{N}^*, p_n = 1 - 0,855^n$$

- b) On veut $n \in \mathbb{N}^*$ tel que: $p_n \geq 0,99$

$$\Leftrightarrow 1 - 0,855^n \geq 0,99$$

$$\Leftrightarrow 0,855^n \leq 0,01$$

$$\Leftrightarrow \ln(0,855^n) \leq \ln 0,01$$

$$\Leftrightarrow n \times \ln 0,855 \leq \ln 0,01$$

$$\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln 0,01}{\ln 0,855}$$

↗ par croissance
de $\ln$ sur $\mathbb{R}_+^*$

↗ car $\ln 0,855 < 0$

$$\text{On } \frac{\ln 0,01}{\ln 0,855} \approx 29,4 \quad \text{et on veut } n \in \mathbb{N}^*$$

Donc il faut au moins $n = 30$

3) a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n \sim \mathcal{B}(n; 0,145)$

$$\text{Donc } E(X_n) = 0,145n$$

$$\text{Puis } \forall n \in \mathbb{N}^*, F_n = \frac{X_n}{n}$$

Par linéarité de l'espérance, on a :

$$E(F_n) = E\left(\frac{X_n}{n}\right) = \frac{1}{n} \cdot E(X_n) = \frac{1}{n} \times 0,145n = \boxed{0,145}$$

b) D'après l'inégalité de Bienaymé - Tchebychev, avec une variable aléatoire X d'espérance μ et de variance V :

$$\forall \delta > 0, P(|X - \mu| \geq \delta) \leq \frac{V}{\delta^2}$$

Appliquons cette inégalité à F_n en prenant $\delta = 0,1$, sachant que $E(F_n) = 0,145$ et en admettant que $V(F_n) = \frac{0,123975}{n}$

$$P(|F_n - E(F_n)| \geq 0,1) \leq \frac{V(F_n)}{0,1^2}$$

$$\Leftrightarrow P(|F_n - 0,145| \geq 0,1) \leq \frac{0,123975}{0,01 \times n}$$

$$\Leftrightarrow P(|F_n - 0,145| \geq 0,1) \leq \frac{12,3975}{n}$$

$$\text{Or } \forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{12,3975}{n} \leq \frac{12,5}{n}$$

Donc par transitivité, on obtient :

$$\boxed{P(|F_n - 0,145| \geq 0,1) \leq \frac{12,5}{n}}$$

© On donne $F_{1000} = 0,3$

$$\text{Ainsi, } |F_{1000} - 0,145| = |0,3 - 0,145| = 0,155 \geq 0,1$$

D'après la question précédente, la probabilité de cet événement est majorée par $\frac{12,5}{1000} = 0,0125$ (qui est très faible).

Le responsable de l'entreprise a donc raison de soupçonner un dysfonctionnement des serveurs.

Ex 2:

$$(u_n): u_0 = 2 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{2u_n + 1}{u_n + 2} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_n \neq -2$$

↗
(u_n) bien définie

$$1) \quad u_1 = \frac{2u_0 + 1}{u_0 + 2} = \frac{2 \times 2 + 1}{2 + 2} = \boxed{\frac{5}{4}}$$

$$2) \quad \textcircled{a} \quad \forall n \in \mathbb{N}, a_n = \frac{u_n}{u_n - 1} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_n \neq 1 \quad (\text{car } (a_n) \text{ bien définie})$$

$$a_0 = \frac{u_0}{u_0 - 1} = \frac{2}{2 - 1} = \boxed{2}$$

$$a_1 = \frac{u_1}{u_1 - 1} = \frac{\frac{5}{4}}{\frac{5}{4} - 1} = \frac{\frac{5}{4}}{\frac{1}{4}} = \frac{5}{4} \times 4 = \boxed{5}$$

$$\textcircled{b} \quad \forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{u_{n+1} - 1} = \frac{\frac{2u_n + 1}{u_n + 2}}{\frac{2u_n + 1}{u_n + 2} - \frac{u_n + 2}{u_n + 2}} = \frac{\frac{2u_n + 1}{u_n + 2}}{\frac{2u_n + 1 - u_n - 2}{u_n + 2}}$$

$$\Leftrightarrow a_{n+1} = \frac{2u_n + 1}{u_n - 1} = \frac{3u_n - u_n + 1}{u_n - 1} = 3 \frac{u_n}{u_n - 1} + \frac{-u_n + 1}{u_n - 1}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{a_{n+1} = 3a_n - 1}$$

$$\textcircled{c} \quad \text{Démonstration par récurrence } \mathcal{P}(n): \forall n \in \mathbb{N}^*, a_n \geq 3n - 1$$

Initialisation: Pour $n = 1$

$$\text{on a: } a_1 = 5$$

$$\text{et } 3n - 1 = 3 \times 1 - 1 = 2 \leq a_1$$

$$\Rightarrow \mathcal{P}(1) \text{ vraie}$$

Hérédité: Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons que $a_n \geq 3n-1$

et montrons que $a_{n+1} \geq 3(n+1)-1$ i.e. $a_{n+1} \geq 3n+2$

D'après la question (b), on a: $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = 3a_n - 1$

$$\begin{aligned} \text{D'où: } \textcircled{\text{HR}} \quad a_n \geq 3n-1 &\Rightarrow 3a_n \geq 3(3n-1) \\ &\Rightarrow 3a_n \geq 9n-3 \\ &\Rightarrow 3a_n - 1 \geq 9n-4 \\ &\Rightarrow a_{n+1} \geq 9n-4 \end{aligned}$$

Pour utiliser la transitivité, résolvons l'inéquation suivante:

$$9n-4 \geq 3n+2 \Leftrightarrow 6n \geq 6 \Leftrightarrow n \geq 1$$

On a donc bien par transitivité: $a_{n+1} \geq 9n-4 \geq 3n+2$

$\Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$ vraie

Conclusion: $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour $n=1$ et héréditaire à partir de ce rang, donc d'après le principe de récurrence:

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n \geq 3n-1}$$

$$\textcircled{d} \quad \text{On a: } \lim_{n \rightarrow +\infty} 3n = +\infty \quad \text{d'où } \lim_{n \rightarrow +\infty} 3n-1 = +\infty$$

Par ailleurs, d'après la question précédente: $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n \geq 3n-1$

Donc d'après le théorème de comparaison:

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty}$$

3) (a) On a: $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \frac{u_n}{u_n - 1}$

$$\Leftrightarrow a_n(u_n - 1) = u_n \quad \text{et} \quad u_n - 1 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow a_n \cdot u_n - a_n - u_n = 0 \quad \text{et} \quad u_n \neq 1$$

$$\Leftrightarrow u_n(a_n - 1) = a_n \quad \text{et} \quad u_n \neq 1$$

$$\Leftrightarrow u_n = \frac{a_n}{a_n - 1} \quad \text{et} \quad u_n \neq 1$$

$\forall n \in \mathbb{N}, a_n \neq 1$
car $u_n \neq u_n - 1$
(sinon $0 = -1$)

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{a_n}{a_n - 1}$

(b) Démontrons tout d'abord que $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \neq 0$

D'après la question 2.c), on a $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n \geq 3n - 1 \geq 3 \times 1 - 1 \geq 2$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n \neq 0$

Par ailleurs, d'après la question 2.a), $a_0 = 2 \neq 0$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \neq 0$

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{a_n}{a_n - 1} = \frac{1}{\frac{a_n - 1}{a_n}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{a_n}}$

D'après la question 2.d), on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$

Par passage à l'inverse, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{a_n} = 0^+$

Puis par opérations sur les limites, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1}{1 - 0^+} = \frac{1}{1^-} = 1^+$

D'où (u_n) converge vers 1

4.a) La suite (u_n) est décroissante et tend vers 1.

Ainsi, en partant de $u_0 = 2$, le programme tourne tant que la différence entre u_n et sa limite 1 est strictement supérieure à une valeur p (précision) donnée en argument.

La fonction « *algo(p)* » renvoie donc en premier résultat le plus petit rang n à partir duquel l'écart entre u_n et sa limite 1 devient inférieur ou égal à la valeur p (précision). La valeur u renvoyée en deuxième résultat correspond à la valeur de u_n pour le rang n renvoyé précédemment par le programme.

```
def algo(p):
    u=2
    n=0
    while u-1>p:
        u=(2*u+1)/(u+2)
        n=n+1
    return (n,u)
```

4.b) Le script renvoie $n = 9$ pour $p = 0,001$

```
>>> algo(0.0001)
(9, 1.000033870749221)
```

Le terme u_9 est donc le premier terme de la suite pour lequel $u_n \leq 1,001$

C'est exactement ce que l'on retrouve avec la calculatrice :

rad SUITES		
Suites	Graphique	Tableau
Régler l'intervalle		
n	u_n	v_n
4	1.008264463	
5	1.002747253	
6	1.000914913	
7	1.000304878	
8	1.000101616	
9	1.000033871	
10	1.00001129	

Ex 3:

Affirmation 1: Vraie

(d) est dirigée par $\vec{u} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix}$ et l'axe des ordonnées $(O, \vec{j})$ par $\vec{j} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\forall k \in \mathbb{R}, \vec{u} \neq k\vec{j}$ donc $\vec{u}$ et $\vec{j}$ ne sont pas colinéaires.

Ainsi, (d) et $(O, \vec{j})$ ne sont pas parallèles. Elles sont soit sécantes, soit non coplanaires.

Puis on a : (d) : $\begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = -1 \\ z = 2 - 6t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ et $(O, \vec{j}) : \begin{cases} x = 0 \\ y = s \\ z = 0 \end{cases}, s \in \mathbb{R}$

Recherchons l'éventuelle intersection de (d) et $(O, \vec{j})$:

$$(d) \cap (O, \vec{j}) : \begin{cases} 3 - 2t = 0 \\ -1 = s \\ 2 - 6t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2t = 3 \\ s = -1 \\ 6t = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{3}{2} \\ s = -1 \\ t = \frac{1}{3} \end{cases} \begin{matrix} \swarrow \\ \searrow \end{matrix} \text{ incompatibles}$$

Donc $(d) \cap (O, \vec{j}) = \emptyset$

Ainsi (d) et $(O, \vec{j})$ sont non coplanaires

Affirmation 2: Vraie

Le plan $\mathcal{P}'$ tel que $(d) \perp \mathcal{P}'$ a pour vecteur normal $\vec{u} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix}$ directeur de (d)

Comme $A \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} \in \mathcal{P}'$, on a :

$$\begin{aligned} M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{P}' &\Leftrightarrow \vec{u} \cdot \overrightarrow{AM} = 0 && \supset \overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} x-3 \\ y+3 \\ z+2 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow -2(x-3) + 0 \cdot (y+3) + (-6)(z+2) = 0 \\ &\Leftrightarrow -2x + 6 - 6z - 12 = 0 \\ &\Leftrightarrow -2x - 6z - 6 = 0 \\ &\Leftrightarrow x + 3z + 3 = 0 \end{aligned}$$

Affirmation 3: Fausse

$$\text{On a } C \in (d) \text{ tq } x_c = 2 \Leftrightarrow 3 - 2t_c = 2 \Leftrightarrow 2t_c = 1 \Leftrightarrow t_c = \frac{1}{2}$$

$$\text{D'où } y_c = 2 - 6 \cdot t_c = 2 - 6 \times \frac{1}{2} = 2 - 3 = -1$$

$$\text{Ainsi, on a : } C \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{De plus, on a dans le R.O.N. : } A \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ et } B \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Ainsi, } \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Puis } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 2 \times (-1) + (-1) \times 2 + 1 \times 1 = -2 - 2 + 1 = -3$$

$$\text{Par ailleurs : } \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{\overrightarrow{AB}^2} = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{4 + 1 + 1} = \sqrt{6}$$

$$\text{et } \|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{\overrightarrow{AC}^2} = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{1 + 4 + 1} = \sqrt{6}$$

$$\text{On a enfin : } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\| \times \cos(\widehat{BAC})$$

$$\Leftrightarrow \cos(\widehat{BAC}) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\|}$$

$$\Leftrightarrow \cos(\widehat{BAC}) = \frac{-3}{\sqrt{6} \times \sqrt{6}}$$

$$\Leftrightarrow \cos(\widehat{BAC}) = \frac{-3}{6}$$

$$\Leftrightarrow \cos(\widehat{BAC}) = -\frac{1}{2}$$

$$\text{D'où } \widehat{BAC} = \frac{2\pi}{3} \neq \frac{\pi}{6}$$

Affirmation 4: Vraie

H est le projeté orthogonal de $B \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$ sur $\mathcal{P}$ d'équation : $x + 3z - 7 = 0$

Ainsi $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ normal à $\mathcal{P}$ est un vecteur directeur de (HB) .

Comme $B \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} \in (HB)$, on a : $(HB) : \begin{cases} x = 5 + \lambda \\ y = -4 \\ z = -1 + 3\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \text{Puis } (HB) \cap \mathcal{P} : \begin{cases} x_H + 3z_H - 7 = 0 \\ x_H = 5 + \lambda_H \\ y_H = -4 \\ z_H = -1 + 3\lambda_H \end{cases} & \Rightarrow 5 + \lambda_H + 3(-1 + 3\lambda_H) - 7 = 0 \\ & \Rightarrow 5 + \lambda_H - 3 + 9\lambda_H - 7 = 0 \\ & \Rightarrow 10\lambda_H = 5 \\ & \Rightarrow \lambda_H = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\text{D'où } \begin{cases} x_H = 5 + \lambda_H = 5 + \frac{1}{2} = \frac{11}{2} \\ y_H = -4 \\ z_H = -1 + 3\lambda_H = -1 + 3 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{Ainsi, } (HB) \cap \mathcal{P} = \left\{ H \begin{pmatrix} \frac{11}{2} \\ -4 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \right\}$$

$$\text{Puis } \overrightarrow{BH} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

$$\text{D'où } BH = \|\overrightarrow{BH}\| = \sqrt{\overrightarrow{BH}^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 0^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{9}{4}} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

Ex4: $\Rightarrow$ Partie A:

- 1) La courbe $\mathcal{C}_1$ correspond à la fonction g , et $\mathcal{C}_2$ à g' .

En effet, la courbe $\mathcal{C}_2$ coupe l'axe des abscisses en $x = -2$ et $x = 1$, correspondant aux extremums locaux de $\mathcal{C}_1$.

De plus, on a le tableau suivant avec la précision que permet la représentation graphique :

x	$-\infty$	-2		1	$+\infty$	
$g'(t_2)$		$-$	$\emptyset$	$+$	$\emptyset$	$-$
$g(t_1)$						

- 2) La tangente à $\mathcal{C}_g$ (ici $\mathcal{C}_1$) au point d'abscisse 0 a pour équation : $y = g'(0) \times (x - 0) + g(0)$

Le point de coordonnées $(0; 1)$ appartient à $\mathcal{C}_1$ donc $g(0) = 1$

Puis le point de coordonnées $(0; 2)$ appartient à $\mathcal{C}_2$ donc $g'(0) = 2$

D'où l'équation de tangente :

$$y = 2x + 1$$

$\Rightarrow$ Partie B: (E): $y + y' = (2x+3) e^{-x}$

1) La fonction $f_0 : x \mapsto (x^2 + 3x) \cdot e^{-x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, f_0'(x) &= (2x+3) \cdot e^{-x} + (x^2+3x) \times (-e^{-x}) \\ &= (2x+3) \cdot e^{-x} - (x^2+3x) \cdot e^{-x} \end{aligned}$$

On a immédiatement: $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f_0(x) + f_0'(x) &= \cancel{(x^2+3x) \cdot e^{-x}} + (2x+3) \cdot e^{-x} - \cancel{(x^2+3x) \cdot e^{-x}} \\ &= (2x+3) \cdot e^{-x} \end{aligned}$$

Donc f_0 est solution particulière de (E).

2) Soit $(E_0): y + y' = 0$ l'équation différentielle homogène associée à (E).

$$y + y' = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = -y'$$

Donc $\mathcal{S}_{(E_0)} = \left\{ x \mapsto \lambda e^{-x}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}$

3) La solution générale de (E) est la somme de la solution générale de l'équation différentielle homogène associée (E_0) et d'une solution particulière.

$$\begin{aligned} \text{On a donc: } \mathcal{S}_{(E)} &= \left\{ x \mapsto \lambda e^{-x} + (x^2+3x) \cdot e^{-x}, \lambda \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ x \mapsto (x^2+3x+\lambda) \cdot e^{-x}, \lambda \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

4) g est solution de (E) et $g(0) = 1$, ainsi :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = (x^2 + 3x + \lambda) \cdot e^{-x} \quad \text{avec } \lambda \text{ à déterminer}$$

$$\text{Déterminons } \lambda \text{ avec } g(0) = 1 \Leftrightarrow (0^2 + 3 \times 0 + \lambda) \cdot e^{-0} = 1$$

$$\Leftrightarrow \lambda \times 1 = 1$$

$$\Leftrightarrow \lambda = 1$$

$$\text{D'où } \boxed{\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = (x^2 + 3x + 1) \cdot e^{-x}}$$

5) Notons h les fonctions recherchées.

$$h \text{ est solution de (E) donc } \forall x \in \mathbb{R}, h(x) = (x^2 + 3x + \lambda) \cdot e^{-x}$$

Pour déterminer λ , dérivons deux fois h qui est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, h'(x) &= (2x + 3) \cdot e^{-x} + (x^2 + 3x + \lambda) \cdot (-e^{-x}) \\ &= (-x^2 - x + 3 - \lambda) \cdot e^{-x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Puis } \forall x \in \mathbb{R}, h''(x) &= (-2x - 1) \cdot e^{-x} + (-x^2 - x + 3 - \lambda) \cdot (-e^{-x}) \\ &= (x^2 - x - 4 + \lambda) \cdot e^{-x} \end{aligned}$$

Pour que E_h admettent exactement deux points d'inflexion, il faut que h'' s'annule exactement deux fois en changeant de signe sur $\mathbb{R}$.

Or $\forall x \in \mathbb{R}, e^{-x} > 0$ donc $h''(x)$ est du signe de $x^2 - x - 4 + \lambda$, fonction polynôme du second degré. Nous voulons donc :

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-4 + \lambda) > 0 \Leftrightarrow 1 + 16 - 4\lambda > 0 \Leftrightarrow \lambda < \frac{17}{4}$$

$$\text{D'où } \boxed{\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = (x^2 + 3x + \lambda) \cdot e^{-x}, \quad \lambda \in]-\infty; \frac{17}{4}[}$$

⇒ Partie C: $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = (x^2 + 3x + 2) \cdot e^{-x}$

$$1) \quad \forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) = \frac{x^2 + 3x + 2}{e^x} = \frac{x^2}{e^x} + \frac{3x}{e^x} + \frac{2}{e^x} = \frac{1}{\frac{e^x}{x^2}} + \frac{3}{\frac{e^x}{x}} + \frac{2}{e^x}$$

D'après le théorème des croissances comparées,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

Donc par passage à l'inverse, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{e^x}{x^2}} = 0^+$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{\frac{e^x}{x}} = 0^+$

Puis comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{e^x} = 0^+$

Par somme, $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0^+}$

2) a) On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) &= (2x + 3) \cdot e^{-x} + (x^2 + 3x + 2) \cdot (-e^{-x}) \\ &= (2x + 3 - x^2 - 3x - 2) \cdot e^{-x} \\ &= \boxed{(-x^2 - x + 1) \cdot e^{-x}} \end{aligned}$$

b) $\forall x \in \mathbb{R}, e^{-x} > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $-x^2 - x + 1$ sur $\mathbb{R}$.

Il s'agit d'une fonction polynôme du second degré concave car son coefficient dominant -1 est négatif. Recherchons ses racines :

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \times (-1) \times 1 = 1 + 4 = 5$$

$$\text{D'où} \quad \begin{cases} x_1 = \frac{-(-1) - \sqrt{5}}{2 \times (-1)} = \frac{1 - \sqrt{5}}{-2} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \\ x_2 = \frac{-(-1) + \sqrt{5}}{2 \times (-1)} = \frac{1 + \sqrt{5}}{-2} = -\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

x	$-\infty$	$\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$	$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$		-	+	-
$f(x)$	$+\infty$			0

3) Procédons par disjonction de cas :

* f est strictement croissante sur $\left[\frac{-1-\sqrt{5}}{2}; \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right]$ et $0 \in \left[\frac{-1-\sqrt{5}}{2}; \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right]$

Par ailleurs, $f(0) = (0^2 + 3 \times 0 + 2) \cdot e^{-0} = 2 \times 1 = 2 > 0$

Donc f est strictement positive sur $\left[0; \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right]$

* f est strictement décroissante sur $\left[\frac{-1+\sqrt{5}}{2}; +\infty\right[$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0^+$

Donc f est strictement positive sur $\left[\frac{-1+\sqrt{5}}{2}; +\infty\right[$

* Conclusion: $\forall x \in [0; +\infty[, f(x) > 0$, donc $f(x) \geq 0$

② $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = (x^2 + 3x + 2) \cdot e^{-x}$

on a $x_1 = -1$ racine évidente de $x \mapsto x^2 + 3x + 2$ car la somme alternée des coefficients est nulle. Puis $x_1 \cdot x_2 = \frac{2}{1} \Leftrightarrow x_2 = -2$

Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = (x+1)(x+2) \cdot e^{-x}$

On $\forall x \in \mathbb{R}_+$, on a :

$$\begin{cases} x+1 > 0 \\ x+2 > 0 \\ e^{-x} > 0 \end{cases}$$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}_+, f(x) > 0$, d'où $\forall x \in \mathbb{R}_+, f(x) \geq 0$

4) Comme f est continue (car dérivable) et positive sur $[0; +\infty[$,
l'aire $\mathcal{A}(\alpha)$ du domaine du plan délimité par $(0, \infty)$, $\mathcal{C}_f$ et
les droites d'équation $x=0$ et $x=\alpha$ (avec $\alpha \in \mathbb{R}_+$) vaut:

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}_+, \mathcal{A}(\alpha) = \int_0^{\alpha} f(x) \cdot dx = F(\alpha) - F(0)$$

On admet que: $\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = (-x^2 - 5x - 7) \cdot e^{-x}$

$$\text{D'où } F(0) = (-0^2 - 5 \times 0 - 7) \times e^{-0} = -7 \times 1 = -7$$

$$\text{et } F(\alpha) = (-\alpha^2 - 5\alpha - 7) \cdot e^{-\alpha}$$

Ainsi, $\forall \alpha \in \mathbb{R}_+, \mathcal{A}(\alpha) = F(\alpha) + 7$

$$= (-\alpha^2 - 5\alpha - 7) \cdot e^{-\alpha} + 7$$