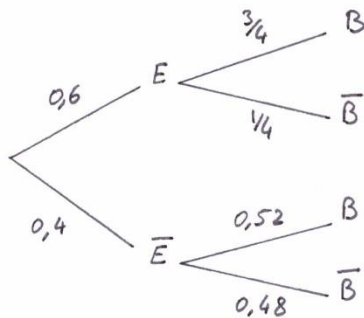


Ex1:

1)



$$\begin{aligned}
 P(E \cap B) &= P(E) \times P_E(B) \\
 &= 0,6 \times \frac{3}{4} \\
 &= \frac{3}{5} \times \frac{3}{4} \\
 &= \frac{9}{20} \\
 &= \boxed{0,45}
 \end{aligned}$$

2) $\{E; \bar{E}\}$ forme un système complet d'événements

D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned}
 P(B) &= P(E \cap B) + P(\bar{E} \cap B) \\
 &= 0,45 + P(\bar{E}) \times P_{\bar{E}}(B) \\
 &= 0,45 + 0,4 \times 0,52 \\
 &= 0,45 + 0,208 \\
 &= \boxed{0,658}
 \end{aligned}$$

$$3) P_B(E) = \frac{P(E \cap B)}{P(B)} = \frac{0,45}{0,658} = \frac{450}{658} = \frac{225}{329} \approx \boxed{0,684} \quad (\text{à } 10^{-2} \text{ près})$$

4) @ On répète $n = 20$ fois de façon identique et indépendante une expérience de Bernoulli dont la probabilité du succès "l'acheteur peut installer une borne de recharge à son domicile" est égale à $p = P(B) = 0,658$. Ainsi, X suit la loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0,658$.

$$\boxed{X \sim \mathcal{B}(20; 0,658)}$$

$$\textcircled{b} \quad P(X=8) = \binom{20}{8} \times 0,658^8 \times (1-0,658)^{20-8} \approx 0,011 \quad (\text{à } 10^{-3} \text{ près})$$

$$\begin{aligned} \textcircled{c} \quad P(X \geq 10) &= 1 - P(X < 10) \\ &= 1 - P(X \leq 9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{On utilise la fonction de répartition} \\ \text{de la calculatrice} \end{array} \right. \\ &\approx 1 - 0,045 \\ &\approx 0,955 \quad (\text{à } 10^{-3} \text{ près}) \end{aligned}$$

$\textcircled{d}$ Comme $X \sim \mathcal{B}(20; 0,658)$, on a :

$$E(X) = n \times p = 20 \times 0,658 = 13,16$$

$\textcircled{e}$ Pour la vente de 20 véhicules, la direction doit prévoir d'engager

$$\text{en moyenne : } E(X) \times \text{Prix de l'installation} = 13,16 \times 1200 = 15\,792 \text{ €}$$

Ex 2 :

1.A) VRAIE

La fonction $f: x \mapsto e^x + x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions de référence dérivables sur $\mathbb{R}$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = e^x + 1 > 0 \quad \text{car } \forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0$$

Donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

$$\text{Puis } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \end{cases} \xRightarrow{\text{par somme}} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\text{et } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0^+ \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty \end{cases} \xRightarrow{\text{par somme}} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

les deux limites et les variations de f sont donc correctes dans le tableau.

Rem: Pour les variations de f , on pourrait également se passer de la dérivée en disant que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ en tant que somme de deux fonctions de référence strictement croissantes sur $\mathbb{R}$.

1.B) FAUSSE

f est continue (car dérivable) et strictement croissante sur $I = \mathbb{R}$

$$\text{On a } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \text{ donc } f(I) = \mathbb{R}$$

Or $-2 \in f(I)$, donc d'après le théorème de la bijection (corollaire du TVI),

$$\exists ! x \in I, f(x) = -2 \quad \text{i.e. l'eq. } f(x) = -2 \text{ admet une unique solution dans } \mathbb{R}$$

2.C) VRAIE

Il faut lever l'indétermination du numérateur en transformant l'expression :

$$\begin{aligned} \forall x > 0, \quad \frac{\ln(x) - x^2 + 2}{3x^2} &= \frac{\ln x}{3x^2} - \frac{x^2}{3x^2} + \frac{2}{3x^2} \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{\ln x}{x^2} - \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{x^2} \end{aligned}$$

On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0$ (théorème des croissances comparées)

et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$

Donc par opérations sur les limites :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x) - x^2 + 2}{3x^2} = \frac{1}{3} \times 0 - \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times 0 = 0 - \frac{1}{3} + 0 = -\frac{1}{3}$$

3.D) FAUSSE

Toute fonction continue sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ admet des primitives sur I .

Ainsi, il existe des primitives K de la fonction h sur $\mathbb{R}$ car h est continue sur $\mathbb{R}$.

Par contre, K décroissante sur $\mathbb{R}$ implique que h soit négative sur $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \text{Or } \forall x \in \mathbb{R}, e^{-x^2+1} > 0 &\Rightarrow 2 \times e^{-x^2+1} > 0 \\ &\Rightarrow 1 + 2e^{-x^2+1} > 1 > 0 \\ &\Rightarrow h(x) > 0 \end{aligned}$$

Ainsi, toutes les primitives K de h sont strictement croissantes sur $\mathbb{R}$.

4.E) VRAIE

La fonction $x \mapsto e^{-\frac{1}{3}x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. Puis par opérations sur la dérivation, $g: x \mapsto 4e^{-\frac{1}{3}x} + 1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = 4 \times \frac{-1}{3} \times e^{-\frac{1}{3}x} + 0 = -\frac{4}{3} \cdot e^{-\frac{1}{3}x}$$

$$\begin{aligned} \text{Puis } \forall x \in \mathbb{R}, \quad 3g'(x) + g(x) &= \cancel{3} \times \frac{-4}{\cancel{3}} \cdot e^{-\frac{1}{3}x} + 4e^{-\frac{1}{3}x} + 1 \\ &= \cancel{-4 \cdot e^{-\frac{1}{3}x}} + \cancel{4 \cdot e^{-\frac{1}{3}x}} + 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Donc g est solution de (E).

$$\text{Puis } g(0) = 4 \times e^{-\frac{1}{3} \times 0} + 1 = 4 \times e^0 + 1 = 4 \times 1 + 1 = 4 + 1 = 5$$

5.F) VRAIE

$$\left. \begin{array}{ll} \text{Posons } u(x) = x & \text{et } v'(x) = e^{-x} \\ u'(x) = 1 & \text{et } v(x) = -e^{-x} \end{array} \right\} \begin{array}{l} u \text{ et } v \text{ sont} \\ \text{continûment dérivables} \\ \text{sur } [0; 1] \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{Puis par IPP: } \int_0^1 x \cdot e^{-x} dx &= \left[x \times (-e^{-x}) \right]_0^1 - \int_0^1 1 \times (-e^{-x}) dx \\ &= -1 \times e^{-1} - 0 \times (-e^{-0}) - \left[e^{-x} \right]_0^1 \\ &= -e^{-1} + 0 - (e^{-1} - e^{-0}) \\ &= -e^{-1} - e^{-1} + 1 \\ &= 1 - 2e^{-1} \end{aligned}$$

Ex 3: $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = n^2$

- 1) le 1^{er} étage comporte $u_1 = 1^2 = 1$ boule
 le 2^e étage comporte $u_2 = 2^2 = 4$ boules
 le 3^e étage comporte $u_3 = 3^2 = 9$ boules
 le 4^e étage comporte $u_4 = 4^2 = 16$ boules

Il y a donc au total : $u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 1 + 4 + 9 + 16 = 30$ boules

2) a) $\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = \sum_{k=1}^n u_k$

$$S_5 = \sum_{k=1}^5 u_k = u_5 + \sum_{k=1}^4 u_k = 5^2 + 30 = 25 + 30 = 55$$

Interprétation: Une pyramide de 5 étages comporte 55 boules au total.

b) def pyramide(n):

$S = 0$

for i in range(1, n+1):

$S = S + i * i$

return S

! La boucle supérieure est toujours ouverte avec l'instruction "range" en Python

on peut remplacer " $i * i$ " ($i \times i$) par " $i ** 2$ " (i^2)

$$\begin{aligned} \text{c) } \forall n \in \mathbb{N}, \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)(n+1)}{6} \\ &= \frac{(n+1)(n(2n+1) + 6(n+1))}{6} \\ &= \frac{(n+1)(2n^2 + n + 6n + 6)}{6} \\ &= \frac{(n+1)(2n^2 + 7n + 6)}{6} \end{aligned}$$

A ce stade, deux solutions s'offrent à nous :

* 1^{ère} solution : développer le second membre de l'égalité à démontrer pour obtenir

également : $\frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6}$

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, \frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6} &= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} \\ &= \frac{(n+1)(2n^2+3n+4n+6)}{6} \\ &= \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6} \end{aligned}$$

* 2^e solution : étudier le polynôme $2n^2+7n+6$

$$\Delta = 7^2 - 4 \times 2 \times 6 = 49 - 8 \times 6 = 49 - 48 = 1$$

$$\text{Puis } \begin{cases} n_1 = \frac{-7 - \sqrt{1}}{2 \times 2} = \frac{-7-1}{4} = \frac{-8}{4} = -2 \\ n_2 = \frac{-7 + \sqrt{1}}{2 \times 2} = \frac{-7+1}{4} = \frac{-6}{4} = \frac{-3}{2} \end{cases}$$

$$\text{D'où } 2n^2 + 7n + 6 = 2 \left(n+2 \right) \left(n + \frac{3}{2} \right)$$

$$= (n+2)(2n+3)$$

$$= (n+2)(2n+2+1)$$

$$= (n+2)(2(n+1)+1)$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6}$

④ Démontrons par récurrence $P(n)$: $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Initialisation: Pour $n=1$, on a $S_1 = u_1 = 1^2 = 1$

$$\text{et } \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{1 \times (1+1) \times (2 \times 1 + 1)}{6} = \frac{1 \times 2 \times 3}{6} = \frac{6}{6} = 1$$

$\Rightarrow P(1)$ vraie

Hérédité: Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons que $S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$$\text{et montrons que } S_{n+1} = \frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6}$$

$$S_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} u_k = \left(\sum_{k=1}^n u_k \right) + u_{n+1} = S_n + u_{n+1}$$

$$\Leftrightarrow S_{n+1} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \quad \text{en utilisant (HR)}$$

$$\Leftrightarrow S_{n+1} = \frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6} \quad \text{d'après la question 2.c)}$$

$\Rightarrow P(n+1)$ vraie

Conclusion: $P(n)$ vraie pour $n=1$ et héréditaire à partir de ce rang,

donc d'après le principe de récurrence: $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

3) On cherche $n \in \mathbb{N}^*$ tq $S_n \leq 200$, n étant le plus grand possible.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, S_{n+1} = S_n + u_{n+1} \Leftrightarrow S_{n+1} - S_n = u_{n+1} > 0 \Rightarrow (S_n) \text{ strict. croissante}$$

$$\text{Puis } S_7 = \frac{7 \times (7+1) \times (2 \times 7 + 1)}{6} = \frac{7 \times 8 \times 15}{6} = \frac{7 \times 4 \times 2 \times 3 \times 5}{2 \times 3} = 140 < 200$$

$$\text{Et } S_8 = \frac{8 \times (8+1) \times (2 \times 8 + 1)}{6} = \frac{8 \times 9 \times 17}{6} = \frac{4 \times 2 \times 3 \times 3 \times 17}{2 \times 3} = 12 \times 17 = 204 > 200$$

La plus grande pyramide qu'il pourra construire aura $n=7$ étages.

Il utilisera ainsi $S_7 = 140$ oranges pour la construire.

Ex4:

1) Dans le R.O.N. $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$, on a $E \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $C \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

2) a) Dans le R.O.N., on a $A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $E \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $G \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

D'où $\overrightarrow{AE} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AG} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, et on a $\overrightarrow{DB} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\text{Puis } \begin{cases} \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{DB} = 0 \times 1 + 0 \times (-1) + 1 \times 0 = 0 + 0 + 0 = 0 \text{ donc } \overrightarrow{DB} \perp \overrightarrow{AE} \\ \overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{DB} = 1 \times 1 + 1 \times (-1) + 1 \times 0 = 1 - 1 + 0 = 0 \text{ donc } \overrightarrow{DB} \perp \overrightarrow{AG} \end{cases}$$

On a $\overrightarrow{DB}$ orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AG}$, non colinéaires

(car $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \overrightarrow{AG} \neq \lambda \overrightarrow{AE}$), qui dirigent le plan (GEA).

Ainsi, $\overrightarrow{DB} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est normal au plan (GEA).

b) Comme $\overrightarrow{DB}$ est normal au plan (GEA), ce plan admet

une équation cartésienne de la forme $1 \times x + (-1) \times y + 0 \times z + d = 0$

i.e. $x - y + d = 0$

↑
coordonnées de $\overrightarrow{DB}$

On $A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in (GEA)$ donc $x_A - y_A + d = 0 \Leftrightarrow 0 - 0 + d = 0 \Leftrightarrow d = 0$

D'où (GEA): $x - y = 0$ ou $x = y$

$$\text{ou } M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in (GEA) \Leftrightarrow \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$$

$$\Leftrightarrow 1 \times (x - x_A) + (-1) \times (y - y_A) + 0 \times (z - z_A) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 0) - (y - 0) + 0 = 0$$

$$\Leftrightarrow x - y = 0$$

3) a) Soit $m \in [0; 1]$

On a donc dans le R.O.N. : $C \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $K \begin{pmatrix} m \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; $L \begin{pmatrix} 1-m \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $E \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\text{Puis } \overrightarrow{CK} \begin{pmatrix} x_K - x_C \\ y_K - y_C \\ z_K - z_C \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{CK} \begin{pmatrix} m-1 \\ 0-1 \\ 0-0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{CK} \begin{pmatrix} m-1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{et } \overrightarrow{LE} \begin{pmatrix} x_E - x_L \\ y_E - y_L \\ z_E - z_L \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{LE} \begin{pmatrix} 0 - (1-m) \\ 0-1 \\ 1-1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{LE} \begin{pmatrix} m-1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

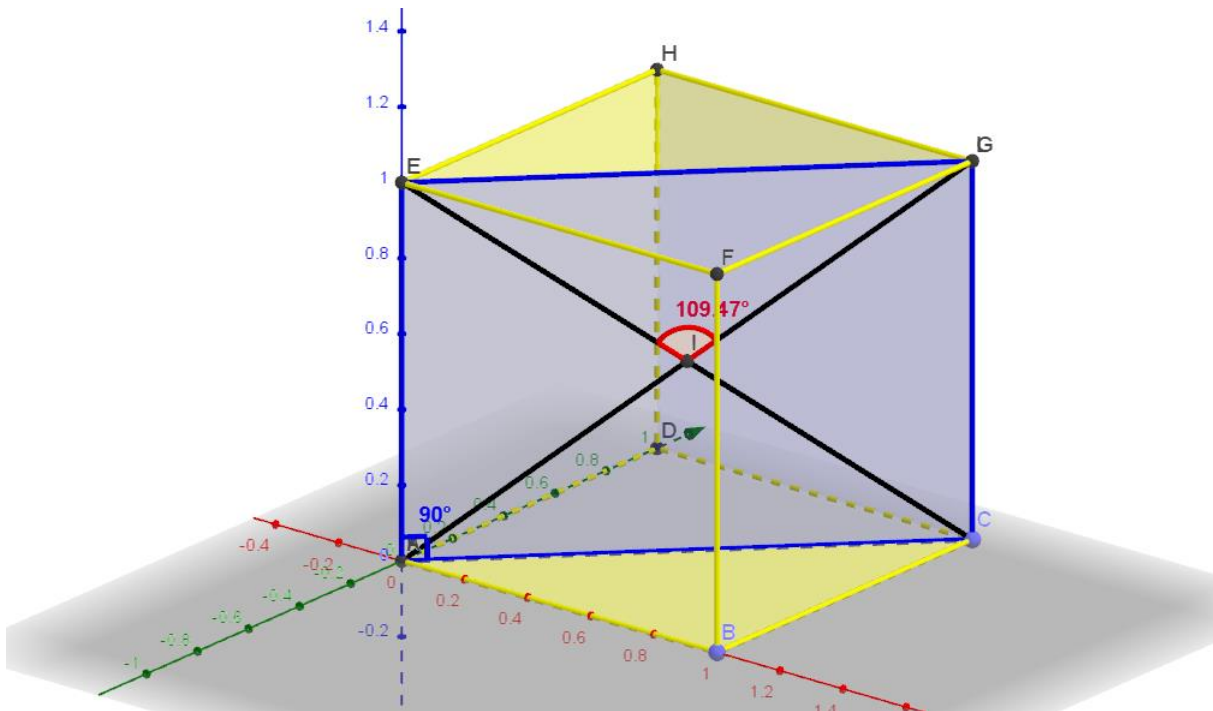
$\forall m \in [0; 1]$, $\overrightarrow{CK} = \overrightarrow{LE}$ donc CKEL est un parallélogramme.

b) Dans le R.O.N., on a $\overrightarrow{KC} \begin{pmatrix} 1-m \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{KE} \begin{pmatrix} -m \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

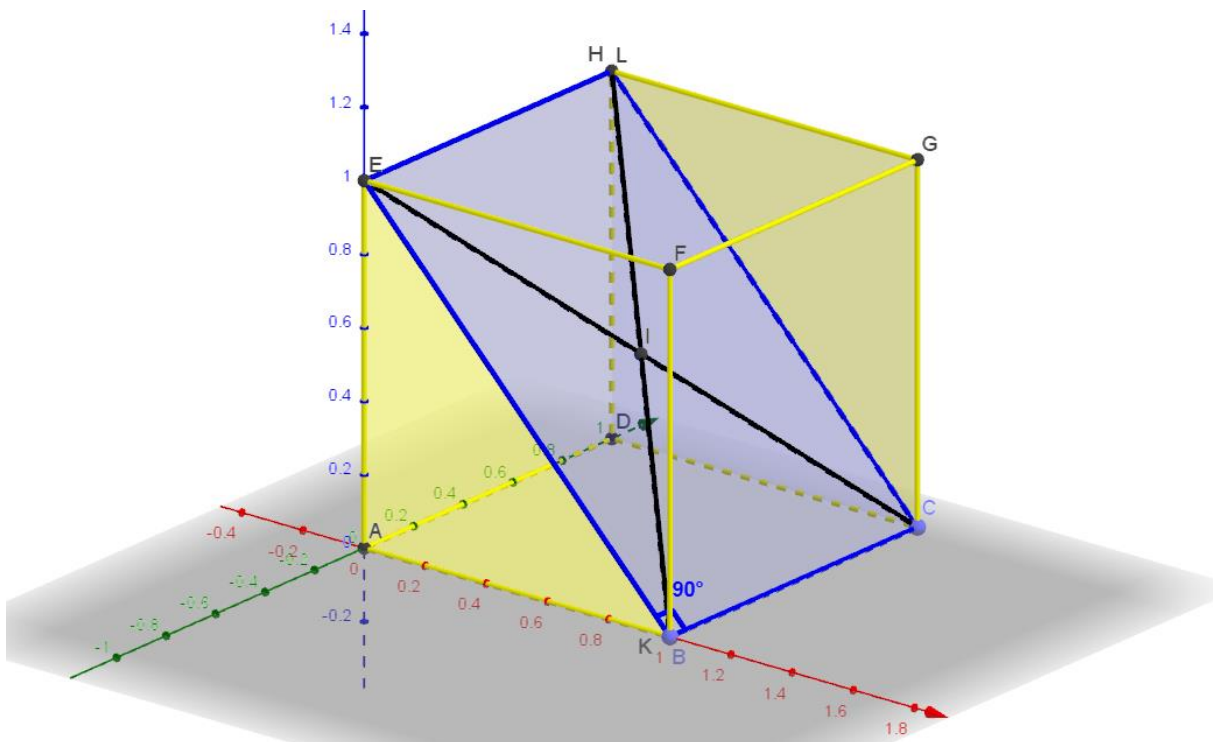
$$\begin{aligned} \text{Puis } \forall m \in [0; 1], \overrightarrow{KC} \cdot \overrightarrow{KE} &= (1-m) \times (-m) + 1 \times 0 + 0 \times (-1) \\ &= m(m-1) + 0 + 0 \\ &= m(m-1) \end{aligned}$$

c) On sait que CKEL est un parallélogramme

$$\begin{aligned} \text{Donc CKEL est un rectangle} &\Leftrightarrow \text{CKEL possède un angle droit} \\ &\Leftrightarrow (\overrightarrow{KC}, \overrightarrow{KE}) \text{ est droit} \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{KC} \cdot \overrightarrow{KE} = 0 \\ &\Leftrightarrow m(m-1) = 0 \\ &\Leftrightarrow m = 0 \text{ ou } m-1 = 0 \\ &\Leftrightarrow m = 0 \text{ ou } m = 1 \end{aligned}$$



Cas $m = 0$



Cas $m = 1$

4) a) $m = \frac{1}{2}$ donc $L \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $K \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

On sait que CKEL est un parallélogramme

Donc CKEL est un losange $\Leftrightarrow$ CKEL possède 2 côtés consécutifs de même longueur.

Donc le R.O.N., on a $\overrightarrow{KC} \begin{pmatrix} 1-\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{KC} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

et $\overrightarrow{KE} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

Puis $KC = \|\overrightarrow{KC}\| = \sqrt{\overrightarrow{KC}^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + 1} = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$ u.l.

et $KE = \|\overrightarrow{KE}\| = \sqrt{\overrightarrow{KE}^2} = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 0^2 + (-1)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + 0 + 1} = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$ u.l.

On a $\begin{cases} KC = KE \\ \text{CKEL est un parallélogramme} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\text{CKEL est un losange}}$

Rem: Comme CKEL est un parallélogramme, on pourrait également prouver que ses diagonales sont perpendiculaires, i.e. $\overrightarrow{EC} \cdot \overrightarrow{LK} = 0$

Dans le R.O.N., on a $\overrightarrow{EC} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{LK} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Puis $\overrightarrow{EC} \cdot \overrightarrow{LK} = 1 \times 0 + 1 \times (-1) + (-1) \times (-1) = 0 - 1 + 1 = 0$

b) D'après (3.6), comme $m = \frac{1}{2}$, on a $\overrightarrow{KC} \cdot \overrightarrow{KE} = m(m-1) = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2} - 1\right) = \frac{1}{2} \times \frac{-1}{2} = -\frac{1}{4}$

Puis $\overrightarrow{KC} \cdot \overrightarrow{KE} = \|\overrightarrow{KC}\| \times \|\overrightarrow{KE}\| \times \cos(\widehat{CKE})$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{4} = KC \times KE \times \cos \widehat{CKE}$

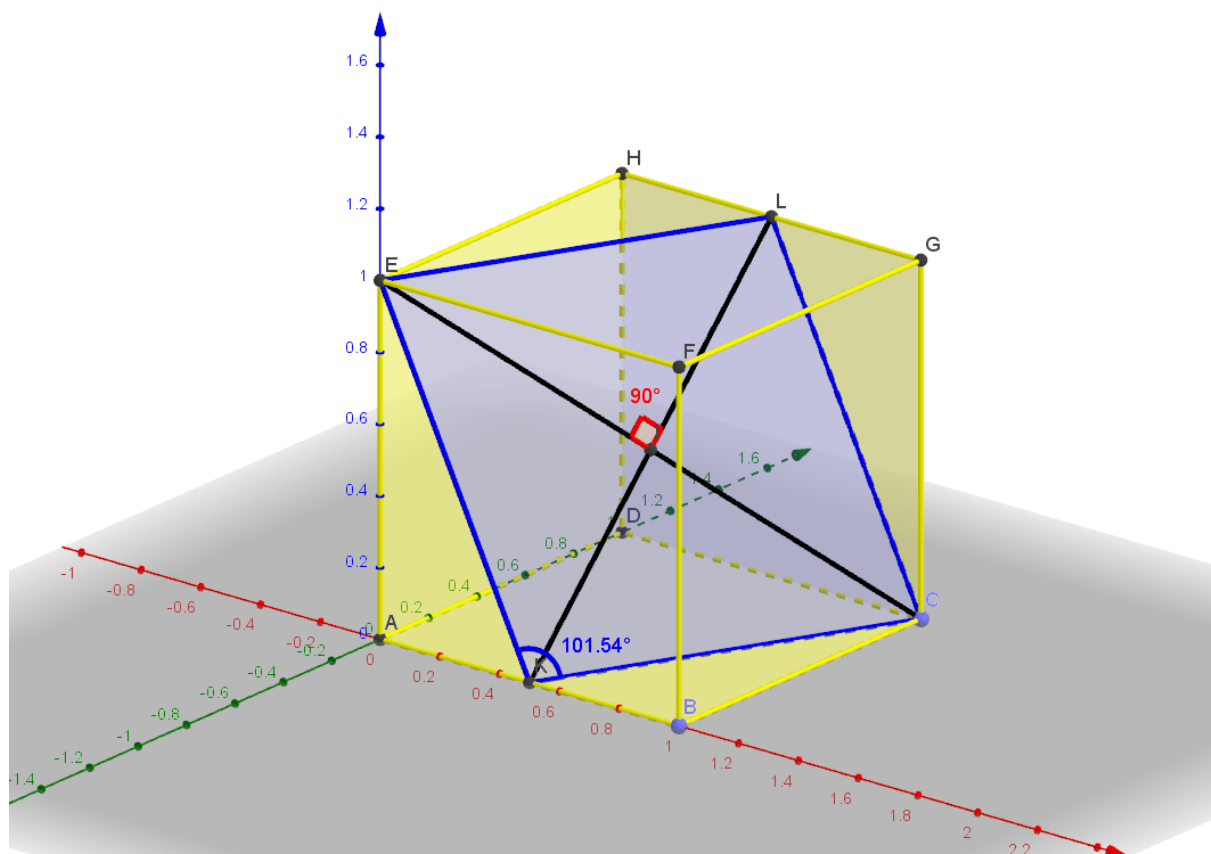
$\Leftrightarrow -\frac{1}{4} = \frac{\sqrt{5}}{2} \times \frac{\sqrt{5}}{2} \times \cos \widehat{CKE}$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{4} = \frac{5}{4} \times \cos \widehat{CKE}$

$\Leftrightarrow \cos \widehat{CKE} = -\frac{1}{5}$

D'où $\widehat{CKE} = \cos^{-1}\left(-\frac{1}{5}\right) \approx 102^\circ$ (au degré près)

! Calculatrice en mode "degrés"



Cas $m = 0,5$